Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt -hvorfor ikke?

Højgaard Jensen, Tomas

Publication date:
2007

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Højgaard Jensen, T. (2007). *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt -hvorfor ikke?* Roskilde Universitet. IMFUFA-tekst : i, om og med matematik og fysik Nr. 458
http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/

IMFUFA tekst

- I, OM OG MED MATEMATIK OG FYSIK

Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt - hvorfor ikke?

Tomas Højgaard Jensen
Ph.D.-afhandling
Marts 2007

nr. 458 - 2007

Roskilde University,
Department of Science, Systems and Models, IMFUFA
P.O. Box 260, DK - 4000 Roskilde
Tel: 4674 2263   Fax: 4674 3020

Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke?

Af: Tomas Højgaard Jensen, marts 2007

IMFUFA-tekst nr. 458/ 2007 – 438 sider – ISSN: 0106-6242

Denne afhandling er et af resultaterne af et kombineret forsknings- og udviklingsprojekt indenfor matematikkens didaktik. Projektet har bestået i at gennemføre en systematisk undersøgelse struktureret omkring spørgsmålet:

Hvorfor er matematisk modellering ikke matematikundervisningens omdrejningspunkt?

Undersøgelsen er startet med en analyse af, hvad man potentielt kan opnå ved at lægge stor vægt på matematisk modellering i matematikundervisningen. Det har jeg fulgt op med at analysere nogle forhold som det er centralt at være opmærksom på ved tilrettelæggelsen af en sådan undervisning. Derefter har jeg brugt disse pejlemærker til at forsøge at lade en klasse i det almene gymnasium gennemføre et toårigt matematikundervisningsforløb med matematisk modellering som omdrejningspunkt. Dette forløb har jeg så analyseret med henblik på at identificere hvad der har været muligt og hvad der har udgjort centrale hindringer på alle niveauer.

Hvis man ser projektet i lyset af den gennemførte forsøgsundervisning, kan man nemt få det indtryk, at afhandlingen er en analyse af specielt det almene gymnasiums matematikundervisning. Det er dog kun del IV der specifikt er underlagt denne afgrænsning. Hovedparten af de resterende dele af analysen er gennemført med tanke på de matematikholdige almendannende uddannelser generelt, og jeg forestiller mig derfor at den også kan have interesse for personer, der ikke specifikt er orienteret mod det almene gymnasium – men det er selvfølgelig op til andre end mig at bedømme.

Forord

Det projekt som der her berettes om, startede helt tilbage i foråret 1997. Dengang indledte jeg sammen med min makker Per Gregersen (tak for dejligt samarbejde, Per) specialestudierne i matematikkens didaktik ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter. Mine studier her fortsatte efter afslutningen af kandidatuddannelsen, da jeg i direkte forlængelse heraf i 1998 blev ansat som ph.d.-stipendiat samme sted og med samme faglige fokus. Denne ansættelse strakte sig helt frem til slutningen af 2003, hvilket bl.a. skyldtes at jeg i en længere periode undervejs blev frikøbt af Undervisningsministeriet til at være akademisk sekretær på det såkaldte KOM-projekt. I begyndelsen af 2004 skiftede jeg så de fysiske rammer ud, men blev indenfor feltet, da jeg blev ansat i min nuværende stilling som adjunkt i matematikkens didaktik ved Danmarks Pædagogiske Universitet, Institut for Curriculumforskning.

Nu afsluttes projektet formelt med indleveringen af denne afhandling – IMFUFA-tekst nr. 458 (ISSN: 0106-6242) – til forsvar for ph.d.-graden. Der er mange mennesker jeg gerne vil takke for inspirerende med- og modspil og dejligt samvær undervejs i forløbet. Det gælder bl.a. alle tidligere og nuværende kolleger på IMFUFA og på DPU (ingen nævnt, ingen glemt), som har været og er afgørende for at jeg trives med og glædes ved mit arbejde.

Mere specifikt vil jeg også sige tak til eleverne i forsøgsklassen på Allerød Gymnasium, deres matematiklærer Karsten Wegener, min og Karstens samarbejdspartner Erik von Essen, fagkonsulent Bjørn Grøn, min vejleder Mogens Niss og min kæreste Karen Jørgensen:

Til jer, allerødder, fordi I havde modet og nysgerrigheden til at indskrive jer som elever i forsøgsklassen, for mange inspirerende timer sammen på Allerød Gymnasium og fordi I har givet mig lov til at bruge mine erfaringer og data herfra i forsknings- og uddannelsessammenhænge.

Til dig, Karsten, fordi du havde modet og nysgerrigheden til at springe ud i så omfattende et forsøg, fordi du gav mig så uhindret adgang til din undervisning og dine overvejelser herom og gav mig lov til åbent at berette om det i denne afhandling, og fordi du så engageret gik ind i det gode og tætte samarbejde vi havde hele vejen igennem.

Til dig, Erik, for det inspirerende og tætte samarbejde ved etableringen af og forarbejdet til forsøgsundervisningen og for mange gode input og generel støtte og opbakning mens det stod på.

Til dig, Bjørn, fordi du – på trods af stort tidspres som ny fagkonsulent – med tydelig interesse kastede dig ind i samarbejdet omkring den summative evaluering af forsøgsundervisningen, og fordi du derved var med til at sørge for at forsøget også på dette punkt gav værdifuldt stof til eftertanke.

Til dig, Mogens, fordi du hele vejen har formået både at være ven, vejleder og fagkollega og derigennem har forvaltet dilemmaet ved at støtte udviklingen af orienteret autonomi på en måde der har passet mig utroligt godt, og for din grundige og kompetente læsning og kommentering af teksten efterhånden som den blev til.

Til dig, Karen, fordi du har bakket mig op og har tålt min manglende stress over at det kombinerede speciale- og ph.d.-projekt som var normeret til at vare tre et halvt år, endte med at vare 10, og fordi vi sideløbende hermed sammen har gennemført så mange andre og langt vigtigere projekter.

Roskilde d. 30. marts 2007

Tomas Højgaard Jensen

Resumé

Denne afhandling er et af resultaterne af et kombineret forsknings- og udviklingsprojekt indenfor matematikkens didaktik. Projektet har bestået i at gennemføre en systematisk undersøgelse struktureret omkring spørgsmålet: *Hvorfor er matematisk modellering ikke matematikundervisningens omdrejningspunkt?*

Undersøgelsen er startet med en analyse af, hvad man potentielt kan opnå ved at lægge stor vægt på matematisk modellering i matematikundervisningen. Det har jeg fulgt op med at analysere nogle forhold som det er centralt at være opmærksom på ved tilrettelæggelsen af en sådan undervisning. Derefter har jeg brugt disse pejlemærker til at forsøge at lade en klasse i det almene gymnasium gennemføre et toårigt matematikundervisningsforløb med matematisk modellering som omdrejningspunkt. Dette forløb har jeg så analyseret med henblik på at identificere hvad der har været muligt og hvad der har udgjort centrale hindringer på alle niveauer.

Denne strukturering af undersøgelsen motiveres og uddybes i *del I*, som afsluttes med en kombination af de forskningsspørgsmål jeg har formuleret, og en synopsis. Som en mere formel sammenfatning af undersøgelsens og afhandlingens struktur gengiver jeg denne del af teksten her:

a) Hvilke *potentialer* kan jeg på baggrund af henholdsvis matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for der er, ved at arbejde med analyse og konstruktion af matematiske modeller i matematikholdige almendannende uddannelser?
b) Hvilken betydning kan jeg tillægge *begreberne* matematisk modellering, matematisk problemløsning, kompetence, matematisk modelleringskompetence, matematisk problembehandlingskompetence, teknologisk kompetence og demokratisk kompetence, så de i forhold til de fundne potentialer kan bruges konstruktivt i forbindelse med tænkning omkring samt tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af matematikholdig undervisning på almendannende uddannelser?

I *del II* argumenterer jeg for, at de afsøgte potentialer eksisterer på to fronter: I et begrundelsesmæssigt perspektiv handler det om at kunne levere væsentlige bidrag til udvikling af elevernes *teknologiske og demokratiske kompetence*. I begge tilfælde er potentialet gradbøjet efter hvor aktivt eleverne tager del i de afgrænsende og kritisk vurderende sider af arbejdet med matematiske modeller, hvilket motiverer en begrebsforståelse som betoner disse sider af en matematisk modelleringsproces.

I et kognitions-psykologisk perspektiv ligger potentialet i at udvikle elevernes *relationelle forståelse* ved at skabe anvendelsesmæssig erfaringstilknytning til de matematiske begrebsstrukturer der er i spil. Muligheden for at indfri dette potentiale gradbøjes efter i hvilket omfang eleverne som en del af arbejdet med matematisk modellering engageres i anvendelsesorienteret matematisk problemløsning, hvilket motiverer en bestemt forståelse af hvad matematisk problemløsning vil sige.

c) Hvilke *tilrettelæggelsesmæssige karakteristika* i forhold til måden matematisk modellering potentielt kan integreres i undervisningen på kan jeg med afsæt i teoretiske analyser argumentere for som værende centrale, hvis målet er i så vid udstrækning som muligt at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence?

I *del III* opstiller jeg fire tilrettelæggelsesmæssige ankerpositioner: 1) Matematisk modellering praktiseret som *elevstyret problemorienteret projektarbejde* skal indgå som tilbagevendende aktivitet i undervisningen. 2) De overordnede indholdsmæssige retningslinjer for undervisningens afvikling skal bestå i en krydsning af en karakteristik af en række *faglige kompetencer* og overordnede *faglige stofområder*. 3) Den didaktiske kontrakt i de ikke-projektorganiserede dele af undervisningen skal – kort fortalt – have udvikling af elevernes matematiske problembehandlingskompetence som omdrejningspunkt, og en betydelig del af de problemer der arbejdes med, skal involvere *matematisering*. 4) Det skal sikres at der er *overensstemmelse mellem hvad der tillægges vægt i henholdsvis undervisningen og den summative evaluering*. I afhandlingen her har jeg afgrænset mig til kun at forsvare de tre førstnævnte positioner gennem en egentlig analyse.

d) Hvad er karakteren af de *hindringer* som i et konkret tilfælde stiller sig i vejen for utopien om en fuldstændig realisering af "den gode praksis" i overensstemmelse med de centrale tilrettelæggelsesmæssige karakteristika?

Med alle de foregående teoretiske studier som reference beskriver jeg i *del IV* forløbet af *et konkret forsøgsprojekt*, hvor en klasse på 25 elever og en lærer i det almene gymnasium gennemførte det toårige forløb til B-niveau i matematik efter en til lejligheden formuleret forsøgsbekendtgørelse (appendiks A). Undervejs i beskrivelsen udpeges en række *succesfulde elementer* i forhold til de opstillede idealer, og efterfølgende fremdrages fire *hindrende forhold*: Forvaltningen af tiden, begrænsninger i lærerens ressourcer, vanskeligheder med muliggørelsen af elevstyring og forhold vedrørende den afsluttende skriftlige eksamen.

I *del V* runder jeg afhandlingen af med en række *fremadrettede refleksioner og forslag* rettet mod såvel matematikdidaktisk forskning som matematikundervisningens praksis.

Summary

This dissertation – entitled “Developing mathematical modelling competency as the hub of mathematics education – why not?” – is one of the results from a combined research and developmental project within the area of mathematics education. The project has consisted of making a systematic enquiry structured around the question: *Why is mathematical modelling not the hub of mathematics education?*

The enquiry started with an analysis of what is potentially achievable by putting great emphasis on mathematical modelling in the teaching of mathematics. This was followed by an analysis of some aspects central to the planning of such a teaching. I then used these points of orientation to attempt having a class in the general gymnasium – upper secondary school – carry out a two year mathematics teaching programme with mathematical modelling as the hub. I have then analysed this programme with the aim of identifying what has been possible and what have been the important hindrances at all levels.

This structure will be motivated and elaborated in *part I*, which ends with a combination of the formulated research questions and a synopsis. I here reproduce this part of the text as a more formal short presentation of the structure of the enquiry and of the dissertation:

a) What *potentials* of working with analysis and construction of mathematical models in general education with a mathematical content can I argue for the existence of, based on analyses from the perspective of mathematics as a teaching subject and cognitive psychology?
b) What meaning can I ascribe to the *concepts* mathematical modelling, mathematical problem solving, competence, mathematical modelling competency, mathematical problem tackling competency, technological competency and democratic competency to make them a constructive tool with respect to the identified potentials in relation to thinking about and plan, carry out and evaluate general education with a mathematical content?

In *part II* I argue for the existence of two kind of potentials: From a justificational perspective it has to do with an ability to make significant contributions to the development of the pupils *technological and democratic competence*. In both cases the potential is graded according to how active the pupils are taking part in the aspects of mathematical modelling having to do with delimitation and critical evaluation, which motivates a conceptual understanding emphasising these aspects of the mathematical modelling process.

From a cognitive-psychological perspective the potential lies in developing the pupils *relational understanding* by creating connections between applicational experiences and the mathematical concept structures in play. The possibility of fulfilling this potential is graded according to how much the pupils are involved in application oriented mathematical problem solving as part of their work with mathematical modelling, which motivates a certain understanding of what mathematical problem solving means.

c) What *organizational characteristics* of the way mathematical modelling can potentially be integrated into the teaching can I defend as being central based on theoretical analyses, if the goal is to develop the pupils mathematical modelling competence as much as possible?

In *part III* I draw up four organizational anchor positions: 1) Mathematical modelling practised as *participant directed problem oriented project work* must be a recurrent activity in the teaching. 2) The general guidelines for the carrying out of the teaching as regards the content must consist of a crossing of a characterization of a number of *subject specific competencies* and overall *subject areas*. 3) The didactical contract in the non-project organized parts of the teaching must – to put i short – have development of the pupils mathematical problem tackling competence as the hub, and a considerable part of the problems to work with must involve *mathematization*. 4) A *harmony between what is valued in the teaching and in the summative assessment* must be ensured. Here in the dissertation I have delimited myself only to defend the first three positions by means of an analysis proper.

d) What are the nature of the *hindrances* that in a specific case stand in the way of the Utopia of a complete realization of *the good practice* in accordance with the central organizational characteristics?

Referring to alle the preceding theoretical studies *part IV* contains a description of the course of *a specific experimental project*, where a class of 25 pupils and a teacher in the general gymnasium carried through the two-year course to B-level in mathematics based on an experimental curriculum made for the occassion (appendix A). Parallel to the description a list of *successfull elements* with respect to the established ideals are pointed out, and subsequently four *hindering matters* are brought to light: Time management, limitations in the resources of the teacher, difficulties of making participant directed teaching possible and matters relating to the final written exam.

In *part V* I close the dissertation by putting forward a number of prospective reflections and suggestions aimed at research as well as practice within mathematics education.

Indhold

Del I

Motivering

1 Udgangspunktet

1.1 Frustrationen

Hvorfor er matematisk modellering ikke omdrejningspunktet for matematikundervisning med et almendannende sigte? Det virker af flere grunde som en oplagt god ide, og alligevel har jeg en klar oplevelse af at det ikke er tilfældet: Matematisk modellering spiller i almindelighed ikke nogen væsentlig rolle i den danske matematikundervisning og kan derfor på ingen måde siges at være omdrejningspunktet, heller ikke på de almendannende uddannelser som jeg interesserer mig for og kender mest til. Hvorfor ikke?

Afhandlingen her er et af resultaterne af et projekt som har haft denne blanding af frustration og undren som igangsættende drivkraft. Hovedformålet med dette projekt – som jeg i resten af afhandlingen blot vil referere til som "projektet" – har været at bidrage til at ændre matematikundervisningen på uddannelser med et almendannende sigte, så den i højere grad end nu bidrager til at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence, og spørgsmålet "hvorfor ikke?" skal ses i denne sammenhæng. Et andet formål med projektet har været at etablere et systematisk samarbejde mellem matematikdidaktisk forskning og matematikundervisningens praksis, som tager den kompleksitet ethvert undervisningsforløb rummer, alvorligt.

For at tilgodese begge disse formål har tilrettelæggelsen af projektet haft et længerevarende fuldt undervisningsforløb som omdrejningspunkt. Konkret har det drejet sig om et alternativt toårigt forløb til obligatorisk niveau på matematisk linje i det almene gymnasium i Danmark. Projektet har inkluderet tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af forsøgsundervisningen, og afhandlingen her er bl.a. et forsøg på at dokumentere og analysere hele denne proces.

I næste kapitel fremlægger og diskuterer jeg de afgrænsninger som har givet projektet den form det har, samt hvordan analysens struktur som en konsekvens heraf ser ud. Kapitlet afsluttes (på side 22f) med en synopsis over de resterende dele af afhandlingen, inklusive de forskningsspørgsmål som har udstukket kursen for analysen.

I resten af dette kapitel uddyber jeg motivationen for at ville gennemføre projektet. Til en start vil jeg invitere dig som læser med på et lille tankeeksperiment.

1.1.1 Et scenario

Forestil dig at du er en lærer der sidder og skal planlægge et undervisningsforløb i matematik, som du efterfølgende skal gennemføre sammen med en gruppe elever eller studerende. Som den pædagogisk interesserede og engagerede person du er, er du selvfølgelig optaget af at dine elever eller studerende lærer matematik så det kan "bruges til noget". Siden du har fattet interesse for en afhandling som denne er du sikkert også enig i, at anvendelser af matematik som en konsekvens heraf skal være en del af undervisningen. Det er et dogme som med tiden har vundet bred tilslutning i matematiklærerkredse, specielt hvis vi holder universiteternes uddannelse af kandidater i matematik udenfor.[1]

Som en person der selv er uddannet i matematik, er du sikkert også indstillet på, at arbejde med opgaver af forskellig slags bør udgøre en central del af undervisningen. Dels er det endnu et matematiklærer-dogme med endnu færre opponenter, dels har du sikkert talrige personlige erfaringer fra bl.a. matematikkens verden som bekræfter en formodning om, at opgaveløsning er med til at udvikle forståelsen af nye begreber og metoder.

De to dogmer, som jeg har brugt som aksiomer i dette projekt, gør det naturligt at fokusere på opgaver orienteret mod anvendelsen af matematik. Hvis en så generel tilkendegivelse skal have konsekvenser for undervisningens praksis, er der mindst to spørgsmål som det er nødvendigt at forholde sig til: a) *Hvilke* anvendelsesorienterede opgaver, eller – mere generelt – hvilke slags anvendelsesorienterede opgaver, skal du give dine elever eller studerende[2] at arbejde med? b) *Hvordan* integreres arbejdet med forskellige slags opgaver mest hensigtsmæssigt i undervisningen?

[1] Efter min mening bør anvendelser af matematik også være blandt de konstituerende elementer i uddannelsen af kandidater i matematik. Det har jeg personligt gode erfaringer med fra kandidatuddannelsen i matematik på Roskilde Universitetscenter (hvis struktur er beskrevet i Niss; 2001c), og jeg har på den naturvidenskabelige basisuddannelse samme sted deltaget i udviklingen af et kursus, hvis erklærede mål er at udvikle deltagernes evne til at anvende matematik ift. naturvidenskabelige problemstillinger (Blomhøj et al.; 2001). I afhandlingen her vil jeg imidlertid kun perifert beskæftige mig med matematikundervisning på universitetsniveau, dels fordi det ikke er væsentligt for størstedelen af analysen her at inddrage det tertiære uddannelsesniveau, dels fordi jeg har erfaret, at det at bringe universitetsmatematikundervisning på banen ofte fører diskussionen i en anden retning end den jeg her vil holde fast i.

[2] I resten af afhandlingen vil jeg nøjes med at tale om "elever" som fællesbetegnelse for personer der modtager undervisning. Det skyldes udelukkende sproglige hensyn, og skal altså ikke tages som udtryk for en stillingtagen til forskellen på at være elev og studerende, tværtimod.

Nogle konkrete opgaver

Nogle konkrete, ikke helt tilfældigt udformede opgaver kan hjælpe med at gøre en stillingtagen til disse spørgsmål mere jordnær og forpligtende:

1a Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.

1b Når man skal overhale på en landevej, er der flere forskellige ting som har indflydelse på, hvornår det er sikkert at gøre det, herunder længden L af den bil man overhaler, afstandene S_1 og S_2 til bilen før og efter man er trukket ud, ens egen hastighed V_e, hastigheden V_o af den bil man overhaler og hastigheden V_m af eventuel modkørende trafik.

Hvad er sammenhængen mellem disse størrelser og det stykke der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale?

1c Overhaling på en landevej kræver frit udsyn et stykke frem ad vejen. Lad os kalde denne minimale udsynslængde U. Der er flere forskellige ting som har indflydelse på størrelsen af U. I første omgang vil vi holde os til at se på længden L af den bil man overhaler, den mindst forsvarlige afstand til bilen før man trækker ud, S_1, og før man trækker ind igen, S_2, ens egen hastighed V_e og hastigheden V_o af den bil man overhaler.

a) Tegn en skitse af overhalings-situationen. Hvor lang tid vil du være om at overhale en stillestående bil, hvis $L = 3$ m, $S_1 = 50$ m, $S_2 = 10$ m og $V_e = 80$ km/t?

U svarer til længden af det stykke du når at køre, fra du begynder at trække ud til du efter overhalingen er tilbage i din egen vejbane. Sammenhængen mellem U og de øvrige variable vi har i spil, er givet ved følgende formel:

$$U = \frac{V_e}{V_e - V_o}\,(L + S_1 + S_2)$$

b) Hvad bliver U hvis $L = 3$ m, $S_1 = 50$ m, $S_2 = 40$ m, $V_e = 80$ km/t og $V_o = 70$ km/t?

Modellen kan gøres mere realistisk ved også at inddrage eventuel modkørende trafik. Herved vokser U, som nu svarer til afstanden til den nærmeste modkørende bil når overhalingen igangsættes, af to grunde: For det første nærmer den modkørende bil sig med en hastighed V_m i løbet af den tid man er om at foretage overhalingen. For det andet skal man kunne nå at trække ind igen efter overhalingen med en mindste forsvarlig afstand S_3 til den modkørende bil. Med disse nye variable i spil kommer formlen til at se således ud:

$$U = \frac{V_e + V_m}{V_e - V_o}(L + S_1 + S_2) + S_3$$

c) Vurdér betydningen af den modkørende bils hastighed, fx ved at fastholde værdierne givet i spørgsmål b), vælge en værdi for S_3 og beregne U for forskellige værdier af V_m.
d) Giv en vurdering af hvor stor betydning variationer i de øvrige variables værdi har for størrelsen af U.

I forbindelse med en færdselskampagne mod for høj hastighed på landevejene er man interesseret i at kunne beregne, hvor hurtigt det er forsvarligt for en bilist at køre, hvis man forestiller sig at man kender værdien af de øvrige variable i spil.

e) Omform den sidst givne version af formlen så V_e står isoleret, og benyt denne omformning til at vurdere betydningen af variationer i de øvrige variables værdi for størrelsen af V_e.

Hvilket *potentiale* rummer arbejde med afsæt i hver af disse opgaver i forhold til at lære matematik så det kan "bruges til noget" udenfor matematikken selv? Hvilke af de givne muligheder ville du i praksis vælge, under hvilke omstændigheder og til hvilket formål?

Uhensigtsmæssigt valg af opgavetyper

Spørgsmålet om hvilket potentiale arbejde med forskellige typer opgaver rummer, lægger op til en nærmere analyse som jeg vil give mig i kast med i del II. Denne analyse udfolder og giver mening til det korte og unuancerede svar som jeg på forhånd var nået frem til baseret på egne erfaringer som lærer og elev og almindelig eftertænksomhed i den forbindelse: For de fleste elever på grundskolens afsluttende trin og videre frem i uddannelsessystemet rummer den første opgave (1a) et stort potentiale i forhold til at lære selv at "køre med matematikken". Dette potentiale bliver mindre og mindre i takt med at problemstillingen fra opgave 1a udfoldes mere og mere i opgave 1b og 1c.

Spørgsmålet om hvilken af de viste opgaver man i praksis ville vælge, kender jeg selvsagt ikke svaret på og kommer heller ikke til det. Alligevel er det et spørgsmål der har været med til at give mig blod på tanden i forhold til at igangsætte projektet her, fordi jeg har en klar – men på ingen måde systematisk underbygget – fornemmelse af hvad svaret vil være: Hvis du er som matematiklærere er flest[3], vil du *i praksis* vælge at stille overhalingsopgaven i den sidste af de givne versioner, og det vil være mere og mere urealistisk at de respektive opgaver vil indgå som et element i undervisningen jo længere op i rækken af opgaver man kommer.

Hvis jeg forsøger at generalisere diskussionen er det med andre ord mit indtryk, at der er en aftagende funktionel sammenhæng mellem det anvendelsesmæssige potentiale ved at arbejde med en given type opgaver, og den vægt sådanne opgaver har i matematikundervisningens praksis. En logisk konsekvens heraf er, at et stort antal elever ikke bliver så gode til at bruge deres matematiske viden til noget uden for matematikken selv, som de potentielt kunne være blevet med en mere hensigtsmæssig vægtning af forskellige typer opgaver. Og det synes jeg – som en person med stor interesse for og engagement i hvad der kan og bør komme ud af de mange ressourcer (personlige og materielle) der bruges på matematikundervisning – er ærgerligt og frustrerende!

1.2 Nysgerrigheden

1.2.1 Tre umiddelbare spørgsmål

Med udgangspunkt i denne ærgrelse og frustration er der forskellige spørgsmål som byder sig til som afsæt for nærmere præcisering og undersøgelse.

Er der virkelig grund til at være frustreret?

Det har jeg ikke fundet værd at arbejde systematisk med! Den personlige *oplevelse* af at noget ikke er som det burde være er det der reelt er med til at motivere arbejdet, og den oplevelse vil statistiske undersøgelser på makroniveau ikke ændre radikalt ved, uanset om de giver baggrund for at forstærke eller nedtone frustrationen. Det er altså ikke store internationale komparative undersøgelser som PISA, SIALS og TIMSS[4] der har leveret mentalt "brændstof" til denne afhandling, deres relevans i øvrigt

[3] Det er du sikkert ikke, alene fordi de færreste matematiklærere orker eller gider læse fagdidaktisk forskningslitteratur som fx denne afhandling. Alternativt kan du have en kollega i tankerne, som prioriterer i overensstemmelse med fremstillingen her. Du skal sandsynligvis ikke lede længe i hukommelsen!

[4] PISA: Programme for International Student Assessment. Se www.pisa.oecd.org/.
SIALS: Second International Adult Literacy Survey. Se www.ets.org/all/ials.html.
TIMSS: Third International Mathematics and Science Study. Se timss.bc.edu/.

ufortalt, og jeg har ikke kastet mig ud i tilsvarende mere lokalt afgrænsede undersøgelser.

En anden grund hertil – udover at min oplevelse af situationen ikke er statistisk betinget – er at den type resultater, som statistiske undersøgelser med højt aggregeringsniveau naturligt fremkommer med, stemmer dårligt overens med en af mine personlige ambitioner med matematikdidaktisk forskningsarbejde: At et sådant arbejde virker *konstruktivt* inspirerende og på længere sigt praksisudviklende *både* for de lærere hvis undervisning forskningen kan siges at vedrøre, og for de kolleger indenfor forskningsverdenen som arbejder med samme problemfelt.

Jeg har med andre ord hellere villet nå frem til et (nok så beskedent og lokalt forankret) bidrag af typen "jeg har gennem mine undersøgelser fundet et vist belæg for at ofre mere opmærksomhed og flere ressourcer på ... og iværksætte tiltag af typen ..., hvis vi vil fremme en udvikling i retning af ...", end et (nok så omfattende) bidrag af typen "elever i populationen ... svarer *generelt* at ... når man spørger dem om ..., og de er *generelt* gode/dårlige til at løse opgaver karakteriseret ved ...". Det er min oplevelse at selv meget udviklingsorienterede matematiklærere har svært ved at blive inspireret af den sidstnævnte type bidrag, fordi forbindelsen til den undervisningspraksis som naturligt er deres udgangspunkt, er meget indirekte.

Hvad skal der til?

Spørgsmålet "hvad skal der til?" har jeg gerne villet arbejde videre med, og har i en vis udstrækning også gjort det. Projektet har imidlertid ikke haft dette spørgsmål som omdrejningspunkt (på trods af at det vel er det spørgsmål der mest umiddelbart byder sig til, når man er frustreret over noget der ikke er som det burde være), hvilket der er to grunde til.

Den første grund er at vi allerede kender svaret! Eller rettere sagt: Vi kender en lang række ingredienser der – betragtet som nødvendige betingelser – bør indgå i en matematikundervisning med et anvendelsessigte, så det er efter min mening ikke der skoen trykker rent forskningsmæssigt. "Vi" er i denne forbindelse den del af det matematikdidaktiske forskningssamfund som arbejder med anvendelsers rolle i matematikundervisningen, samt de lærere uden for forskningsmiljøet som følger og eventuelt deltager i diskussionerne heraf på konferencer, seminarer etc. Desuden inkluderer "vi" sidst men ikke mindst også de lærere som pr. erfaring ved "hvad der skal til", hvad enten de hver især praktiserer i overensstemmelse hermed eller ej.

Hvad består disse ingredienser så i? Tja, der er adskillige, indbyrdes overlappende plusord at gribe fat i: Tid til fordybelse, projektarbejde, tværfaglighed, deltagerstyring, undersøgende adfærd, problemløsning – du kan sikkert selv føje ord til listen. Der er lavet masser af eksperimenterende undervisning med fokus på hver af disse elementer, og er det litteratur med fokus på et af disse plusord man er ude efter, går man bestemt ikke forgæves på biblioteket.

Man kunne så forestille sig at der er tale om ny erkendelse, som blot skal have tid til at nå lidt bredere ud i undervisningslandskabet, men det er ikke tilfældet: Betydningen af de forskellige ingrediensers tilstedeværelse i matematikundervisningen har været kendt længe, hvilket blot understreger at det ikke er rådvildhed på det idemæssige plan, der udgør flaskehalsen ift. matematikundervisningens udvikling. Det gælder fx betydningen af at opdyrke undersøgende adfærd, som er det jeg forsøger at nærme mig med omtalen af de tre opgaver. Det forhold som jeg tidligere gav udtryk for frustration over, er rammende formuleret allerede i matematikdidaktikkens spæde barndomsår som videnskab af en af feltets grand old men, Henry Pollak (1970, p. 328):

> "[. . .] the heart of applied mathematics is the injunction: 'Here is a situation; think about it.' The heart of our usual mathematics teaching, on the other hand, is: 'Here is a problem; solve it' or 'Here is a theorem; prove it.' We have very rarely, in mathematics, allowed the students to explore a situation for himself and find out what the right theorem to prove or the right problem to solve might be. Many mathematics educators agree that this absence of individual exploration by the students actually makes for bad mathematics teaching."

Den anden grund til at spørgsmålet "hvad skal der til?" ikke har været omdrejningspunkt for projektet, har at gøre med at det ikke kun har været tænkt som et forskningsprojekt, men også som et projekt hvis sigte bl.a. er mere direkte at bidrage til en udvikling af matematikundervisningens praksis, som rækker ud over os medvirkende i projektet.

Et sådan fokus på praksisudvikling går da fint i spænd med en interesse for spørgsmålet "hvad skal der til?", kunne man med god ret mene. Det er jeg sådan set enig i. Problemet er, at en praksisrettet undersøgelse af "hvad der skal til" ofte bliver til en søgen efter *tilstrækkelige* betingelser for at den efterstræbte form for undervisning bliver en realitet, og sådanne logiske implikationer eksisterer ikke i forhold til noget så personafhængigt som undervisning. Og hvis man bilder sig ind at have fundet sådanne tilstrækkelige betingelser fører det nemt til en "kongens efterfølger-strategi", hvor hovedparten af deltagerne i aktiviteten blot formodes at rette ind på linje og gøre ligesom den der går forrest. Tilsigtet eller ej kan det meget nemt komme til at sende et skingert signal i retning af at "alle I andre matematiklærere er nogle ignoranter, som ikke forstår de dybere sammenhænge og derfor griber tingene helt forkert an, men hvis I nu bare lige lytter efter hvordan det skal gøres så skal vi nok få gennemført den nødvendige forbedring af matematikundervisningen."

Det tror jeg ikke på – hverken at alle andre matematiklærere er nogle ignoranter eller at selv nok så velmente og kvalificerede skolemesterprædikener er måden at forbedre matematikundervisningen på. En sådan strategi signalerer at der i forhold til et givet sæt at mål eksisterer en bedste måde at undervise på, som alle bør stræbe efter at praktisere, hvad jeg er fundamentalt uenig i. Tværtimod bør man gøre hvad man kan for at "lade de tusind blomster blomstre". Desuden er skolemesterprædikener – og andre former for oppefra-og-ned-strategier som ikke inddrager lærerne som medreformatorer (jf. McLaughlin; 1987) – en uhyre ineffektiv måde at arbejde med undervisningsreformer på, især når dem der prædikes for ikke selv oplever noget udtalt behov for at blive belært. Der vil jo reelt være tale om at bruge "tankpasserpædagogik" (se fx Laursen; 1998) for at overbevise en gruppe lærere om, at de skal gennemføre ændringer af deres undervisning som bl.a. består i at slippe af med tankpasserpædagogikken!

Resultatet af projektet bag denne afhandling skal derfor ikke være et naivt forsøg på at komme med en pakkeløsning, der en gang for alle overflødiggør spørgsmålet "hvordan skal man undervise i matematik på en måde så eleverne efterfølgende kan anvende det de har lært?". Min nysgerrighed ift. spørgsmålet om hvad der skal til handler om *konsekvenserne* af at føre de velbegrundede idéer ud i livet: Hvad kommer der ud af at fokusere på nogle af de ingredienser de fleste er enige om skal være en del af "gryderetten", skærpe analysen af dem i forhold til en given kontekst og så forsøge at gennemføre undervisning som er tro mod de opstillede principper?

Hvorfor sker det ikke?

Det spørgsmål har jeg gerne villet arbejde videre med – her er jeg virkeligt nysgerrig! Hvorfor er matematikundervisningen ikke gennemgående karakteriseret ved, at de mange ingredienser jeg og mange andre er overbevist om vil tjene et anvendelsesformål, er blandt de bærende konstruktioner når undervisningen tilrettelægges og afvikles? Hvorfor fravælger de fleste lærere eksempelvis de opgavetyper der for alvor inviterer til undersøgende adfærd, for nu at vende tilbage til de tidligere formulerede opgaver?

En nærliggende forklaring kunne jo være, at du – stadig som en tænkt repræsentant for "de mange" – simpelthen er uenig i min vurdering af potentialet i de forskellige opgavetyper. Min erfaring fra at have ført lignende diskussioner med et stort antal matematiklærerkolleger er imidlertid, at de færreste grundlæggende er uenige i min vurdering af tingenes tilstand. Hvis vi går ned i konkrete detaljer er der selvfølgelig ting at diskutere og være uenige om, men jeg er overbevist om at det – desværre – er de færreste der kan slå ud med armen og sige: “Du er muligvis frustreret, Tomas, men det er værst for dig. I min undervisning foregår valget af udfordringer eleverne stilles overfor, og de arbejdsformer de benytter i den forbindelse, helt i overensstemmelse med, hvad jeg mener gør dem bedst muligt i stand til at anvende den matematik de har mødt i andre sammenhænge.”

Hvorfor kan matematiklærere generelt ikke sige sådan?

1.2.2 Summa summarum

Samlet set indfanges min nysgerrighed af følgende spørgsmål:

- *Hvorfor* er anvendelser af matematik *ikke* omdrejningspunktet for størstedelen af al matematikundervisning?
- Hvor langt kan man komme med hensyn til at *gennemføre* matematikundervisning som udvikler elevernes evne til at anvende matematikken?
- Hvilke forhold træder på baggrund af arbejdet med disse spørgsmål frem som nogle der fortjener *ekstra opmærksomhed*?

Disse spørgsmål har jeg gerne villet blive klogere på ved at gennemføre projektet bag denne afhandling, både fordi jeg selv fundamentalt set er nysgerrig og fordi jeg tror et systematisk arbejde med afsæt i disse spørgsmål har en mulighed for at virke konstruktivt inspirerende på personer, som på forskellig vis (eksperimenterende undervisning, forskning, uddannelsesplanlægning etc.) arbejder med udvikling af matematikundervisningen.

2 Afgrænsning: Hvad vil og kan jeg undersøge systematisk?

2.1 Mit perspektiv på problemfeltet

I forrige kapitel forsøgte jeg at indfange min motivation for at igangsætte projektet bag afhandlingen her med ordene frustration og nysgerrighed. Den dobbelthed der ligger heri har medvirket til at projektet lige fra første spadestik har skullet tilgodese to forskellige interesser med hver deres krav om relevans: Dels en *forskningsmæssig relevans*, hvor interessen samler sig om at *identificere, karakterisere og forstå* sammenhænge (Niss; 1997, 1999a) mellem på den ene side karakteristiske træk ved undervisningens tilrettelæggelse og gennemførelse og på den anden side konsekvenser heraf, dels en *praktisk/uddannelsespolitisk relevans*, hvor interessen samler sig om at bidrage til at *ændre* den eksisterende undervisningspraksis i bestemte retninger.

2.1.1 Nødvendige og/eller ønskelige fokuseringer

Begge former for relevanskrav har spillet en rolle ved afgrænsningen af projektet, nogle gange pr. nødvendighed og andre gange i kraft af min forskningsmæssige og/eller uddannelsespolitiske interesse.

Ønsket fokus på de almendannende uddannelser

Mine interesser både forskningsmæssigt og uddannelsespolitisk har gjort det til et nemt valg at koncentrere indsatsen om de *matematikholdige almendannende uddannelser*. Hermed menes – med formuleringen fra den såkaldte KOM-rapport (Niss & Jensen; 2002, p. 148) – "uddannelser, der rummer matematikholdige elementer, og som sigter mod, som et konstituerende element, at bidrage til de deltagende personers almendannelse (her forstået som almen-gyldig personlighedsdannelse), viden og kunnen med 'de mange' som målgruppe, jf. Niss (2000)."[1]

Denne forståelse rummer en krydsning af to forskellige betydninger af ordet "almen"; "i almindelighed" og "for de mange". Begge disse måder at afgrænse uddannelsestypen på virker skærpende på min interesse. Den første fordi jeg synes "i almindelighed" er et krævende, men i mange sammenhænge også nødvendigt svar at give på det implicit stillede spørgsmål: "I hvilke sammenhænge skal (matematik)undervisningen gøre nytte?" Det er forskningsmæssigt en vældig interessant problemstilling hvad det kræver af undervisningen. Når det som her er undervisning hvor der står matematik på skemaet der er tale om, er et første uomgængeligt krav at deltagerne skal lære noget andet og mere end "matematik for matematikkens skyld". Den store betydning konteksten har for hvad der læres og forstås er et af matematikdidaktikkens væsentligste resultater (Niss; 1999a), og som et specialtilfælde heraf har man forlængst opgivet den gamle tanke om, at matematiks eksterne anvendelighed er sikret i kraft af fagets formaldannende effekt – en aktivitet der generelt træner "tænkemusklen".

Et at de positive krav der naturligt melder sig, er at de – deltagerne i almendannende matematikundervisning – skal lære (også) at anvende matematik i forhold til udfordringer, der ikke i udgangspunktet stammer fra matematikkens univers – ellers kan nytten dårligt siges at gælde "i almindelighed". Beskæftigelsen med matematik skal altså "tjene" anvendelserne heraf og ikke omvendt.[2] I sig selv er det imidlertid ikke en konstatering som hjælper nogen videre, så bolden synes naturligt givet op til nærmere undersøgelser.

Den anden afgrænsning af almendannende uddannelser – at svaret på spørgsmålet "for hvem skal uddannelsen gøre nytte?" skal være "for de mange" – gør af to grunde denne uddannelsestype uddannelsespolitisk interessant. For det første er det alment accepteret at denne brede basis i uddannelsessystemet udgør et meget væsentligt element i formningen af en velfærdsstat med demokratisk medlevende borgere, hvorfor måden det gøres på også har stor politisk vægt. For det andet er det – hvis det som et grundlæggende uddannelsespolitisk motiv lykkes en at gøre en forskel – banalt set mere interessant at nå ud til mange end til få!

[1] I Niss & Jensen (2002) – og i Niss (1989) hvor typificeringen også findes – karakteriseres to andre typer matematikholdig uddannelse: De *matematikforbrugende uddannelser* (som fx arkitekt, elektriker, kranfører og politiker) og de *matematiske professionsuddannelser* (som fx forsknings-matematikere, matematiklærere på alle niveauer, teoretiske fysikere og aktuarer).

[2] Man kan godt argumentere for, at anvendelser brugt i matematikforståelsens tjeneste også ind imellem skal være på dagsordenen, fx når arbejdet med anvendelser indgår som led i en kandidatuddannelse i matematik, jf. Ottesen (2001).

Nødvendigt fokus på ét uddannelsestrin

Kravet i ovenståede definition om at almendannelsessigtet skal være et konstituerende element gør, at det i det væsentlige er de matematikholdige dele af undervisningen i grundskolen, de gymnasiale uddannelser[3] og enkeltfagsstudier for voksne[4], vi snakker om (jf. Niss & Jensen; 2002, p. 148). Det er for bredt et sigte, når jeg som nævnt i forrige kapitel ikke er interesseret i at gennemføre statistiske undersøgelser med højt aggregeringsniveau, men hellere vil lave kvalitative studier af hvad der konkret kan og ikke kan lade sig gøre i en given undervisningspraksis.

Jeg har derfor måttet slå ned på en konkret matematikholdig almendannende uddannelse, og valget er faldet på matematikundervisningen i det almene gymnasium. Det er dog kun del IV her i afhandlingen der specifikt er underlagt denne afgrænsning. Hovedparten af de resterende dele af analysen er gennemført med tanke på de matematikholdige almendannende uddannelser generelt, og jeg forestiller mig derfor at den også kan have interesse for personer, der ikke specifikt er orienteret mod det almene gymnasium – men det er selvfølgelig op til andre end mig at bedømme.

Der er tre grunde til at det blev netop det almene gymnasium der kom særligt i fokus (jf. Gregersen & Jensen; 1998, p. 15f). *Den første grund* er at jeg i skoleårene 1996/97 og 1997/98 – svarende til de første år af projektets levetid – parallelt med livet som specialestuderende i matematikkens didaktik på Roskilde Universitetscenter var årsvikar på to forskellige almene gymnasier, begge år med ansvar for et matematikhold. Jeg har derfor personlige erfaringer med at skulle tilrettelægge matematikundervisning på dette niveau, herunder med at skulle prioritere mellem forskellige opgavetyper i stil med den situation, du i forrige kapitel blev bedt om at tænke dig ind i. Desuden har jeg som tidligere nævnt gennem diskussioner med kollegerne på disse skoler fået en god fornemmelse af, hvordan andre matematiklærere i det almene gymnasium tænker om denne del af tilrettelæggelsesudfordringen.

Den anden grund er at jeg har en kandidatuddannelse der berettiger mig til at søge et job som gymnasielærer i matematik og samfundsfag. På det tidspunkt i 1997 da beslutningen skulle træffes var det derfor naturligt at rette opmærksomheden mod den gymnasiale matematikundervisning, da der med et sådant valg meget nemt kunne være tale om en næsten ideél køren i stilling til egen praksis som matematiklærer.

[3] Omfattende det almene gymnasium, højere forberedelseseksamen (hf), højere handelseksamen (HHX) og højere teknisk eksamen (HTX).

[4] Omfattende hf-enkeltfag, Almen voksenuddannelse (AVU) og Forberedende voksenundervisning (FVU).

Nødvendigt og ønsket fokus på arbejdet med matematiske modeller

Den tredje grund til at jeg har valgt at fokusere på netop det almene gymnasiums matematikundervisning, har at gøre med hvordan jeg vælger at arbejde videre med de noget diffuse udtryk at kunne "bruge matematik til noget" og at kunne "anvende matematik uden for dens egen verden". Det er udtryk som jeg flere gange har formuleret som naturlige krav at stille til matematikundervisningen, ikke mindst hvis målet bl.a. er at bidrage til deltagernes almendannelse. Der er imidlertid mange forskellige måder at bruge matematik og matematisk viden og kunnen til noget på, også selv om man stiller det krav at brugen skal vedrøre forhold uden for matematikkens egen verden – noget ekstra-matematisk. Med inspiration fra karakteristikken af en række matematiske kompetencer i den førnævnte KOM-rapport (Niss & Jensen; 2002), som jeg vender tilbage til i afsnit 4.6.2 (side 82f), drejer det sig bl.a. om at

- formulere og løse ekstra-matematiske *problemer* der har en så matematisk grundstruktur, at der er mulighed for transfer fra ens viden og kunnen mht. at arbejde med matematiske problemer (problembehandlingskompetence).
- forholde sig til og selv deltage i ekstra-matematisk *argumentation* som har – eller burde have – en så matematisk eller på anden vis logisk grundstruktur, at der er mulighed for transfer fra ens viden og kunnen med hensyn til at ræsonnere matematisk (ræsonnementskompetence).
- analysere og konstruere matematiske *modeller* af noget ekstra-matematisk (modelleringskompetence).

Det er den sidstnævnte form for ekstra-matematisk anvendelse af matematikbeherskelse, jeg som udgangspunkt har afgrænset mig til at analysere i denne afhandling. Hvis man skal adskille den fra de andre former kan man sige, at matematik i kraft af modeldannelsen anvendes som en teknologi.

Når dette valg har været med til at begrunde fokuseringen på det almene gymnasium, skyldes det at arbejdet med matematiske modeller i undervisningen er en problemstilling, som matematiklærerne tilrettelæggelsesmæssigt har skullet forholde sig til både før (i kraft at det såkaldte "modelaspekt" i den hidtidige bekendtgørelse, som jeg vender tilbage til i afsnit 4.4.4 (side 63)) og nu, hvor en ny bekendtgørelse gældende fra skoleåret 2005/06 (Undervisningsministeriet; 2004) lægger øget vægt på arbejdet med matematiske modeller. En nærmere analyse heraf vil derfor have gode chancer for ikke at ende som en fritsvævende boble i et i øvrigt tomt rum.

2.1.2 Detaljering af grundspørgsmålene "Hvorfor?", "Hvad?" og "Hvordan?"

Med disse afgrænsninger har projektet sagt med få ord bestået i at motivere og forsøge at gennemføre den ønskede form for undervisning i praksis, og så ellers kigge efter muligheder og hindringer på alle niveauer.

Men hvad vil det sige at "gennemføre den ønskede form for undervisning i praksis" – gennemføre *hvad*? At kigge efter hindringer giver kun mening hvis man har identificeret og karakteriseret den form for matematikundervisning og -læring, man forsøger at virkeliggøre. En sådan karakteristik er nødvendigvis en (mere eller mindre bevidst) afspejling af, hvilke aspekter af arbejdet med matematiske modeller man fokuserer på, hvilket igen afspejler de grunde man har til overhovedet at give sig i kast med et didaktisk studie af matematiske modeller.

Denne måde at anskue sagen på udspringer af at tænke på de mange spørgsmål der dukker op, som faldende i tre kategorier:[5] Spørgsmål vedrørende *hvorfor* der (bør) gennemføres matematikundervisning, spørgsmål vedrørende *hvad* der (bør) undervises i, og spørgsmål vedrørende *hvordan* der (bør) undervises.[6] Denne struktur har jeg selv haft gavn af som "tanke-ordner", men som udgangspunkt for en diskussion af mine valg i forbindelse med de mange relevante tilgange, har jeg fundet det formålstjenligt at detaljere kategoriseringen en smule, så den også kan bruges til at skelne mellem hvilke forskellige *former for indsigt*, der ligger til grund for analyser inden for hver kategori. Det er blevet til fire typer af spørgsmål som tilsammen udgør et bud på en udspænding af matematikundervisning som problemfeltet:

Begrundelsesorienterede spørgsmål: Spørgsmål af denne type omhandler *hvorfor* matematikundervisning udbydes af samfundet til givne befolkningsgrupper. For eksempel: "Hvilke behov hos den enkelte borger ønsker man at tilgodese og/eller udvikle gennem matematikundervisningen?" "Hvilke samfundsmæssige behov ønskes tilgodeset gennem matematikundervisningen?" "Hvilken udvikling hos den enkelte og/eller i samfundet som helhed ønsker man at fremme ved at tilbyde/påtvinge en bestemt befolkningsgruppe matematikundervisning?" mv.

[5] Resten af dette afsnit (2.1.2) er et modificeret citat fra Gregersen & Jensen (1998, p. 18ff).

[6] Jf. Niss & Jensen (2002, p. 148f) og Niss (1989). Sidstnævnte rummer en god diskussion af specielt matematiske modellers rolle i undervisningen struktureret efter disse retningslinjer.

Matematisk orienterede spørgsmål: Spørgsmål af denne type rummer to "niveauer". Mest overordnet er filosofisk orienterede spørgsmål som kort kan siges at vedrøre, hvad der *karakteriserer* matematikkens natur. Det kan være spørgsmål som: "Hvad er matematik overhovedet?" "Hvilken status har matematiske objekter?" "Hvordan genereres matematisk erkendelse?" "Hvad konstituerer matematisk sandhed?" mv.

I forlængelse heraf følger en type mere praktisk orienterede spørgsmål der er specifikke i forhold til en given målgruppe, idet de vedrører diskussionen om *hvad* der på et givet niveau skal være matematikundervisningens genstandsfelt. Det kan fx være: "Hvilke matematiske discipliner skal præsenteres og med hvilken tyngde?" "Er der fagligt begrundede retningslinjer for en bestemt rækkefølge at introducere stoffet i?" mv.

Læringsteoretisk orienterede spørgsmål: Denne type spørgsmål kan sammenfattende siges at vedrøre hvad *betingelserne* er for, at effektiv læring af matematik kan finde sted. For eksempel: "Hvordan opbygges en matematisk begrebsstruktur hos den enkelte?" "Hvad vil det sige at kunne og forstå?" "Hvilke følelser aktiveres ifm. forskellige former for læring af matematik?" "Er disse følelser specielle for læring af matematik, eller er de mere generelt knyttet til læringssituationen?" mv.

Implementationsorienterede spørgsmål: Her er der igen tale om spørgsmål på to "niveauer" der begge handler om, *hvordan* matematikundervisningen på et givet uddannelsestrin tilrettelægges og realiseres indenfor en bestemt referenceramme. Det mest overordnede niveau vedrører det perspektiv der ligger bag om undervisningen, og har således de begrundelsesrelaterede og matematiske problemtyper som referenceramme. Spørgsmål af denne type handler derfor om med henblik på hvilke mål en given gruppe skal undervises i et givet matematisk indhold, eksempelvis: "Hvordan tilrettelægges og realiseres en geometriundervisning på grundskolens afsluttende trin der imødekommer den almendannende begrundelse?" "Hvordan tilrettelægges og realiseres gymnasieundervisning i differentialregning, der tager afsæt i en platonistisk opfattelse af matematik?" Hvordan kan en læreplan for gymnasiets matematikundervisning med fokus på arbejde med matematiske modeller se ud? mv.

De implementationsorienterede spørgsmål på det andet "niveau" har de læringsmæssige betingelser som referenceramme. Denne tilgang omfatter spørgsmål om hvordan man tilvejebringer de nødvendige forudsætninger for læring i en given undervisningssituation, for eksempel: "Hvordan bør moderne informationsteknologi anvendes i gymnasiets matematikundervisning, for ikke at give eleverne en overfladisk forståelse af de matematiske begreber?" "Hvordan kan gruppearbejde bedst bruges til at fremme den mundtlige dimension i grundskolens matematikundervisning?" mv.

De fire problemfelter er alle indbyrdes forbundne: Hvordan man begrunder matematikundervisningen på et givet niveau indvirker på, hvilke matematiske emner man mener der er centrale, og hvilke former for læring man ønsker at fremme; hvordan man opfatter matematik som videnskab indvirker på, hvordan man begrunder faget i en undervisningssammenhæng, hvilke emner man fremhæver som de centrale, og hvilken form for pædagogik man mener der skal praktiseres; osv.

En del af forbundetheden består i en vis implikation mellem de begrundelsesmæssige, matematiske, og læringsteoretiske spørgsmål på den ene side og de implementationsorienterede på den anden side. Man kan efter interesse tage afsæt i hver af de tre førstnævnte problemfelter for så at analysere konsekvenserne på de øvrige områder. Analyser af implementationsorienterede spørgsmål kan derimod ikke meningsfuldt finde sted, uden at man først har taget stilling til referencerammen i forhold til de øvrige problemfelter. For eksempel kan man ikke analysere, hvordan gruppearbejde bør praktiseres i matematikundervisningen, eller hvordan arbejde med matematiske modeller bedst integreres heri, uden at forholde sig til, hvad man ønsker at opnå med matematikundervisningen.[7]

2.2 Analysens struktur i grove træk

Hidtil har jeg forsøgt at udlægge kronologien i min motivation for, at projektet indeholder de elementer som det gør. Det handler om en frustration og nysgerrighed som naturligt nok udspringer af specifikke oplevelser med egen og andres undervisningspraksis og betingelserne herfor. De implementationsrettede overvejelser i den forbindelse medfører en nysgerrighed i forhold til at "komme bagom" det specifikke, både med hensyn til *hvad* der egentlig mere generelt er og bør være i fokus, og *hvorfor*. For at kunne komme videre med spørgsmål af den type har jeg måttet foretage mere eller mindre ønskede afgrænsninger på to leder: Dels med hensyn til hvilken form for indsigt der lægges til grund for arbejdet med spørgsmålene, dels

[7] Du – eller andre med lang erfaring indenfor undervisningssektoren – vil måske mene, at du i det daglige arbejde da ofte gør dig overvejelser af implementationsmæssig art uden reference til andre problemfelter. Der er det så min påstand, at du implicit *har* forholdt dig til mange af de spørgsmål som ikke direkte er implementationsrettede, og at det betinger dine implementationsmæssige overvejelser!

hvilken (form for) uddannelse jeg ser på.

Ad den vej er jeg nået frem til et håndterbart udgangspunkt for en systematisk analyse. Kronologien i denne analyse er hvad man kunne kalde "fra det generelle til det specifikke", hvilket altså er udtryk for en efterrationalisering af den motivations- og afklaringsmæssige kronologis hoppen frem og tilbage mellem niveauerne. Af formidlingsmæssige grunde vil jeg fra nu af og afhandlingen ud fremlægge tingene i analytisk rækkefølge, som er som følger.

2.2.1 Et matematikfagligt og et kognitions-psykologisk begrundelsesperspektiv

Den første del af analysen handler om hvad arbejde med matematiske modeller i matematikundervisningen *potentielt* kan siges at kunne bidrage med i et givet begrundelsesmæssigt perspektiv. Analysen rummer to sådanne perspektiver, som jeg vil referere til som henholdsvis matematikfaglig og kognitions-psykologisk (jf. Gregersen & Jensen; 1998, p. 21f). Med en *matematikfaglig analyse* mener jeg en deskriptiv analyse af hvilke *fagopfattelser* af undervisningsfaget matematik der har været de dominerende i en given periode. Heri inkluderer jeg såvel det omgivende samfunds som matematikersamfundets (herunder matematiklærernes) syn på undervisningsfaget matematik og matematikholdig undervisning. I den matematikfaglige analyse beskæftiger jeg mig således primært med de begrundelsesmæssige og matematiske problemfelter.

Med en *kognitions-psykologisk analyse* menes en psykologisk tilgang til de *erkendelsesmæssige* (intellektuelle) dele af en læringsproces. Med dette valg har jeg i første omgang afgrænset mig fra at analysere den affektive del af en læringsproces, som vedrører de følelsesmæssige sider af sagen. Det er efter min mening et af de steder hvor analysen i denne afhandling oplagt inviterer til supplerende og opfølgende analytisk arbejde.

Disse analyser motiverer en klargøring af i hvilken betydning, jeg i resten af analysen bruger en række *centrale begreber*. Det drejer sig om begreberne opgave, matematisk modellering, matematisk problemløsning, kompetence, matematisk modelleringskompetence, matematisk problembehandlingskompetence, teknologisk kompetence og demokratisk kompetence.

2.2.2 Rammerne for undervisningen – et implementationsperspektiv

Kognitions-psykologiske analyser arbejder overvejende med det mindst mulige analytiske fokus; relationen mellem den enkelte person som subjekt og noget der skal læres som objekt. Modsat arbejder man i analyser med udgangspunkt i begrundelsesmæssige diskussioner oftest med relationen mellem matematik som undervisningsfag i en given sammenhæng og det omgivende samfunds begrundelse for at gennemføre en sådan, hvilket kan siges at udgøre det størst mulige analytiske fokus. I et sådant lys kan dynamikken i et klasserum mellem de enkelte elever og mellem eleverne og læreren ses som værende det sted, hvor analyser på de to andre niveauer forsøges integreret, og analyser med fokus på klasserumsdynamikken er derfor en naturlig fortsættelse af udspændingen af problemfeltet.

Denne anden del af det teoretiske arbejde kan siges at bestå i at forpligte analysen på den undervisningsmæssige kontekst. Med klasserumsdynamikken som det centrale objekt har det for mig bestået i at nå frem til nogle tilrettelæggelsesmæssige principper, som principielt holder døren åben for, at de potentialer som den forudgående analyse peger på der er ved at gøre arbejde med problemløsning og modellering til omdrejningspunkt i matematikundervisningen, kan realiseres.

2.2.3 Realisering i praksis – hvorfor ikke?

Den hidtil beskrevne del af analysen er struktureret efter detaljeringen af grundspørgsmålene "Hvorfor?", "Hvad?" og "Hvordan?" nævnt ovenfor. I en situation hvor man i forhold til disse spørgsmål føler sig i stand til med overbevisning at kunne svare "ja, matematisk modellering skal være en central del af matematikundervisningen på de almendannende uddannelser, fordi ... ", "det vi i den forbindelse skal arbejde med er ..., fordi ... " og "tilrettelæggelsesmæssigt skal undervisningen være karakteriseret ved ... og således have ... som de dominerende arbejdsformer", er det så der dukker et ekstra spørgsmål op: Hvorfor *er* matematisk modellering så *ikke* en central del af matematikundervisningen på de almendannende uddannelser?

Det spørgsmål gør jeg mig ingen naive forestillinger om at kunne levere et udtømmende svar på. Det jeg mener at kunne er at bidrage til en større forståelse af problemfeltet ved at have iværksat et forsøg på i praksis at gennemføre matematikundervisning, der er styret af de tilrettelæggelsesmæssige principper, som de forudgående dele af analysen mundede ud i.

Det har således *ikke* været tanken at ende op med en række "før og efter"-testresultater, der indiskutabelt demonstrerer hvor meget af alt det gode eleverne har lært ved at modtage netop denne form for undervisning. Det ville kræve et anderledes forskningsmæssigt design af projektet end det her beskrevne, og ville afspejle en tro på hvad der flytter matematikundervisningen som jeg ikke deler, jf. diskussionen af "hvad skal der til?"-spørgsmålet i afsnit 1.2.1.

2.2.4 Evaluering af det samlede projekt

Sidste del af analysen handler om at se tilbage på projektet som helhed. I min skæring drejer det sig om et "fremadrettet tilbageblik", hvor jeg forsøger at samle op på, hvad jeg synes har været succesfulde og mindre succesfulde elementer i projektet betragtet som et kombineret forsknings- og udviklingsprojekt, samt hvad jeg har af konkrete forslag til mig selv og andre rettet mod henholdsvis forskning og praksis.

2.3 Forskningsspørgsmål og synopsis

Analytisk betragtet kan de spørgsmål som har virket strukturerende og retningsgivende på den forskningsmæssige side af projektet, formuleres som følger, afbrudt af hvad jeg i kondenseret form siger om hver af spørgsmålene i denne afhandling.

Som det fremgår falder spørgsmålene i nogle "klumper" svarende til i hvilken del af afhandlingen det enkelte spørgsmål analyseres og forsøges besvaret. I indledningen til hver af disse dele forsøger jeg at afklare, hvilken status jeg tillægger spørgsmålene, hvilken metode jeg har valgt i forsøget på at besvare dem, og hvilken form for svar (ikke at forveksle med *hvilket* svar) jeg afledt heraf mener at kunne komme med.

a) Hvilke *potentialer* kan jeg på baggrund af henholdsvis matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for der er, ved at arbejde med analyse og konstruktion af matematiske modeller i matematikholdige almendannende uddannelser?

b) Hvilken betydning kan jeg tillægge *begreberne* matematisk modellering, matematisk problemløsning, kompetence, matematisk modelleringskompetence, matematisk problembehandlingskompetence, teknologisk kompetence og demokratisk kompetence, så de i forhold til de fundne potentialer kan bruges konstruktivt i forbindelse med tænkning omkring samt tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af matematikholdig undervisning på almendannende uddannelser?

I *del II* argumenterer jeg for, at de afsøgte potentialer eksisterer på to fronter: I et begrundelsesmæssigt perspektiv handler det om at kunne levere væsentlige bidrag til udvikling af elevernes *teknologiske og demokratiske kompetence*. I begge tilfælde er potentialet gradbøjet efter hvor aktivt eleverne tager del i de afgrænsende og kritisk vurderende sider af arbejdet med matematiske modeller, hvilket motiverer en begrebsforståelse som betoner disse sider af en matematisk modelleringsproces.

I et kognitions-psykologisk perspektiv ligger potentialet i at udvikle elevernes *relationelle forståelse* i retning af at skabe anvendelsesmæssig erfaringstilknytning til de matematiske begrebsstrukturer der er i spil. Muligheden for at indfri dette potentiale gradbøjes efter i hvilket omfang eleverne som en del af arbejdet med matematisk modellering engageres i anvendelsesorienteret matematisk problemløsning, hvilket motiverer en bestemt forståelse af hvad matematisk problemløsning vil sige.

c) Hvilke *tilrettelæggelsesmæssige karakteristika* i forhold til måden matematisk modellering potentielt kan integreres i undervisningen på kan jeg med afsæt i teoretiske analyser argumentere for som værende centrale, hvis målet er i så vid udstrækning som muligt at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence?

I *del III* opstiller jeg fire tilrettelæggelsesmæssige ankerpositioner: 1) Matematisk modellering praktiseret som *elevstyret problemorienteret projektarbejde* skal indgå som tilbagevendende aktivitet i undervisningen. 2) De overordnede indholdsmæssige retningslinjer for undervisningens afvikling skal bestå i en krydsning af en karakteristik af en række *faglige kompetencer* og overordnede *faglige stofområder*. 3) Den didaktiske kontrakt i de ikke-projektorganiserede dele af undervisningen skal – kort fortalt – have udvikling af elevernes matematiske problembehandlingskompetence som omdrejningspunkt, og en betydelig del af de problemer der arbejdes med, skal involvere *matematisering*. 4) Det skal sikres at der er *overensstemmelse mellem hvad der tillægges vægt i henholdsvis undervisningen og den summative evaluering*. I afhandlingen her har jeg afgrænset mig til kun at forsvare de tre førstnævnte positioner gennem en egentlig analyse.

d) Hvad er karakteren af de *hindringer* som i et konkret tilfælde stiller sig i vejen for utopien om en fuldstændig realisering af "den gode praksis" i overensstemmelse med de centrale tilrettelæggelsesmæssige karakteristika?

Med alle de foregående teoretiske studier som reference beskriver jeg i *del IV* forløbet af *et konkret forsøgsprojekt*, hvor en klasse på 25 elever og en lærer i det almene gymnasium gennemførte det toårige forløb til B-niveau i matematik efter en til lejligheden formuleret forsøgsbekendtgørelse (appendiks A). Undervejs i beskrivelsen udpeges en række *succesfulde elementer* i forhold til de opstillede idealer, og efterfølgende fremdrages fire *hindrende forhold*: Forvaltningen af tiden, begrænsninger i lærerens ressourcer, vanskeligheder med muliggørelsen af elevstyring og forhold vedrørende den afsluttende skriftlige eksamen.

I *del V* runder jeg afhandlingen af med en række *fremadrettede refleksioner og forslag* rettet mod såvel matematikdidaktisk forskning som matematikundervisningens praksis.

Del II

Systematisering

3 Introduktion til del II

a) Hvilke *potentialer* kan jeg på baggrund af henholdsvis matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for der er, ved at arbejde med analyse og konstruktion af matematiske modeller i matematikholdige almendannende uddannelser?

b) Hvilken betydning kan jeg tillægge *begreberne* matematisk modellering, matematisk problemløsning, kompetence, matematisk modelleringskompetence, matematisk problembehandlingskompetence, teknologisk kompetence og demokratisk kompetence, så de i forhold til de fundne potentialer kan bruges konstruktivt i forbindelse med tænkning omkring samt tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af matematikholdig undervisning på almendannende uddannelser?

I denne del af afhandlingen udstikkes kursen af disse to spørgsmål. Specielt hvad angår spørgsmål a) giver det kun mening hvis formuleringen ses i sammenhæng med en redegørelse for, i hvilken betydning nogle at de centrale termer bruges.

Det gælder ordet *potentiale*, som bruges som betegnelse for en mulig, men ikke nødvendigvis realiseret styrke. Når jeg ikke bruger ordet "mulighed" i stedet for er det for at indikere, at jeg i denne del af analysen bevidst anskuer problemfeltet idealistisk ved at undlade at inddrage klassen af implementationsorienterede spørgsmål (jf. kategoriseringen i afsnit 2.1.2). Jeg holder mig således i første omgang behageligt fri af de mange snærende bånd, som en seriøs inddragelse af matematikundervisningens praksis i analysen uundgåeligt medfører.

Det gælder også termen *matematikholdige almendannende uddannelser*, som jeg tidligere har redegjort for betegner uddannelser, der rummer matematikholdige elementer, og som sigter mod, som et konstituerende element, at bidrage til de deltagende personers almendannelse (her forstået som almen-gyldig personlighedsdannelse), viden og kunnen med "de mange" som målgruppe, jf. diskussionen på side 13f.

Desuden gælder behovet for afklaring af sprogbrugen ikke mindst termerne *matematikfaglig analyse* og *kognitions-psykologisk analyse*, som jeg diskuterer nærmere i de to følgende afsnit. Denne begrebsdiskussion og selve analyserne med afsæt heri i de to næste kapitler er et redigeret og visse steder udbygget uddrag fra specialeafhandlingen Gregersen & Jensen (1998). Når jeg har valgt at gengive analysen i uddrag frem for bare at referere til teksten fra 1998 er det dels fordi jeg visse steder synes der var behov for at supplere og opdatere fremstillingen, dels af hensyn til helheden i afhandlingen her, som er skrevet med tanke på at være en fortælling om det samlede forsknings- og udviklingsprojekt, hvori specialeafhandlingen i tilbageblik udgør en slags delrapport.

3.1 Et matematikfagligt perspektiv?

Med en *matematikfaglig analyse* mener jeg en deskriptiv analyse af hvad jeg vil referere til som *den eksterne og den interne fagopfattelse* af matematikholdig undervisning og af matematik som fag. Ikke overraskende er det i sammenhængen her matematiks status som undervisningsfag der stilles skarpt på.[1] Betegnelserne “ekstern” og “intern” dækker det omgivende samfunds henholdsvis matematikersamfundets (herunder matematiklærernes) syn på sagen.

3.1.1 60’er-matematikken vs. den nutidige fagopfattelse

Analysen kommer i stand ved at fremdrage nogle væsentlige træk ved to forskellige tilgange til matematikundervisning og den bagvedliggende matematikfaglige forståelse. Udover den nutidige tilgang drejer det sig om den der populært betegnes “60’er-matematikken” eller “den ny matematik”.

Valget af 60’er-matematikken som “sparringspartner” for den nutidige tilgang til matematikundervisning i en historisk komparativ analyse skyldes ikke mindst en begrundet tro på, at den interne fagopfattelse der lå bag 60’er-matematikken, stadig er tilstede som en dominerende del af den nutidige matematikopfattelse: Hvis 60’er-matematikken tidsmæssigt placeres i perioden fra først i tresserne til først i firserne, er hovedparten af den del af befolkningen der nu er i alderen fra sidst i 30’erne til sidst i 50’erne, blevet undervist efter dens principper i grundskole- og/eller

[1] Matematik som fag kan siges at være konstitueret af sin fem-foldige natur som en grundvidenskab, en anvendt videnskab, et system af redskaber for praksis, et rum for en særlig slags æstetiske oplevelser og et undervisningsfag, jf. Niss (1994, p. 367f) og Niss (2001a, p. 12ff). I forhold til en sådan fremstilling er det altså fagopfattelsen af matematik i sidstnævnte skikkelse der analyseres.

Det gør ikke opfattelser af matematiks øvrige naturer uinteressante, fordi de forskellige sider af faget selvsagt påvirker hinanden gensidigt, men det betyder at opfattelser af de øvrige naturer kun er inddraget i analysen når jeg har kunnet se en forbindelse til opfattelsen af matematik som undervisningsfag.

gymnasie-matematikundervisningen. En stor del af de nuværende lærere på disse uddannelsestrin tilhører denne aldersgruppe. Det er derfor helt forventeligt, hvis den aktuelle undervisningspraksis i matematik er stærkt præget af 60'er-matematikkens principper, hvorfor et nærmere kendskab hertil vil være et væsentligt bidrag til en forståelse af den moderne fagopfattelse.

3.1.2 Matematikholdig undervisning vs. matematikundervisning

I næste kapitels analyse af disse to undervisningstraditioner har jeg foretaget den afgrænsning kun at beskæftige mig med *almendannende matematikundervisning*, hvilket jeg bruger som betegnelse for den del af de matematikholdige almendannende uddannelser hvor der står "matematik" på skemaet.

Denne afgrænsning er ikke så uskyldig som den måske ved første øjekast kan se ud, idet den lader en række andre relevante organisatoriske rammer for udvikling af matematisk forståelse og kunnen ude af betragtning. Det kan dreje sig om undervisning indenfor andre beslægtede fagområder som fx fysik og filosofi, tværfaglige forløb mellem matematik og et eller flere af disse fag som ikke er underlagt den timeopdelte skemastruktur, tematisk organiserede forløb som ikke er bygget op over en (tvær)faglig struktur, men som rummer krav om bl.a. matematiske perspektiver etc. Der er således en fare for at man med denne afgrænsning kommer til at virke strukturelt konserverende i forhold til den traditionelle time-fagopdeling af almendannende undervisning, hvilket omtrent er det modsatte af hvad jeg ønsker med dette projekt.

Der er to grunde til at jeg i den matematikfaglige analyse alligevel har valgt det snævrere fokus på almendannende matematikundervisning. Den ene er et indtryk af at det i de sidste ca. 100 år, som er den periode jeg har kendskab til, i Danmark traditionelt er i forbindelse med tilrettelæggelse heraf, at overvejelser vedrørende udvikling af matematisk forståelse og kunnen er blevet artikuleret. Så længe man holder sig til at analysere *begrundelser for* (og altså ikke det samlede læringsmæssige udbytte af) at ofre ressourcer på udvikling af matematisk forståelse og kunnen som en del af forskellige former for almendannende undervisning, er der derfor et begrundet håb om selv med det snævrere fokus at have været omkring størstedelen af de fremførte typer holdninger og argumenter.

Den anden grund er mere pragmatisk, nemlig at en matematikfaglig analyse med et bredere fokus som tager mangfoldigheden af fora for udvikling af matematisk forståelse og kunnen alvorligt, ville være langt mere tidskrævende. Det felt der skulle afsøges for typer af holdninger og argumenter er både større og sværere at afgrænse, og tilkendegivelserne vedrørende matematik og de matematikholdige aspekter af den almendannende undervisningen kræver forventeligt en del udredningsarbejde at nå frem til, jf. den førstnævnte grund til afgrænsningen.

En analyse af synet på matematik og matematikholdig undervisning som har et bredere genstandsfelt end den skemalagte matematikundervisning er således en opgave jeg synes er både spændende og relevant, men som jeg har undladt at give mig i kast med i dette projekt.

3.1.3 Årsager, begrundelser, formål og mål

Analysen af den eksterne fagopfattelse får et naturligt udgangspunkt med fokuseringen på den almendannende matematikundervisning, nemlig de officielt erklærede *mål*[2] hermed som Undervisningsministeriet nedfælder i undervisningsbekendtgørelserne. I forsøget på at karakterisere hvordan samfundet opfatter matematik og matematikundervisning, er det imidlertid nødvendigt at gå bagom disse officielle erklæringer, som alene på grund af teksternes begrænsede omfang umuligt kan afspejle kompleksiteten i *årsagerne*[3] til, at matematikundervisningens rammer er som de er.

Det er heller ikke givet at formålsparagrafferne kan læses som "systemets" bedste bud på at eksplicitere disse årsager. Som en del af kommunikationen mellem de mange aktører i og omkring matematikundervisningen tjener de officielle erklæringer selv mange forskellige formål, og det at *be-*

[2] Som jeg altså – inspireret af fremstillingen i Niss (1996, p. 15) – bruger som betegnelse for relativt konkrete og veldefinerede tilkendegivelser omhandlende en overskuelig fremtid. Som kontrast hertil (uden at det i øvrigt giver mening at forsøge at trække grænsen skarpt op) bruger jeg begrebet *formål* om mere generelle og overordnede tilkendegivelser med stor "flyvehøjde" og langt – muligvis uendelig langt – tidsperspektiv (Ibid.) Først med den gældende bekendtgørelse svarer det til den officielt anvendte sprogbrug, idet ordet "formål" indtil da blev brugt hvor jeg ville bruge "mål".

[3] Denne term bruger jeg i overenstemmelse med fremstillingen i Niss (1996, p. 12):

> "By a (real) *reason* for providing mathematics education to students within some segment of the educational system we understand a driving force, typically of a general nature, which in actual fact has motivated and given rise to the existence (i.e. the origination and the continuation) of mathematics teaching within that segment, as determined by the bodies which make the decisions (including non-decisions) in the system at issue."

grunde[4] undervisningen er kun et af dem.[5] Det er derfor højst tænkeligt at de officielle formålserklæringer for matematikundervisningen indeholder tilkendegivelser, der ikke har nogen umiddelbar forbindelse til årsagerne. Også det omvendte forhold – at der er årsager som ikke kommer til udtryk i formålserklæringerne – kan tænkes ofte at være gældende. Det kan fx skyldes, at der er årsager som anses for politisk ukorrekte eller usympatiske, og som man fra officielt hold derfor ikke ønsker at nedfælde i officielle dokumenter som undervisningsbekendtgørelserne. Et eksempel kan være den effektivitet som matematikundervisningen ofte tilskrives som instrument til at sortere eleverne efter generel intellektuel formåen, til brug i forbindelse med optagelse på fortsatte studier, ansættelser etc.

I forsøget på at karakterisere det eksterne matematiksyn er det således nødvendigt at læse både på og mellem linjerne ved at "krydsklippe" mellem de officielt fremlagte formål med matematikundervisningen og en *karakteristik* af det syn på undervisning generelt og matematikundervisning i særdeleshed, der var og er gældende i det omgivende samfund.

Tre årsagstyper

Som en god ramme for denne analyse anfører Mogens Niss (1996, p. 13), at der essentielt kun er tale om tre årsager til matematikundervisning, der dækker hele den internationale scene, både hvis man ser med nutidige og historiske briller på sagen:

- At bidrage til den tekniske og socio-økonomiske udvikling af samfundet som helhed (hvad jeg vil kalde den økonomisk/tekniske årsag).
- At bidrage til samfundets politiske, ideologiske og kulturelle vedligeholdelse og udvikling (hvad jeg vil kalde den politisk/kulturelle årsag).
- At udstyre individer med værktøjer/kvalifikationer/kompetencer til at hjælpe dem med at klare livets (ud)fordringer (hvad jeg vil kalde den individ-orienterede årsag).

---

[4] Også her følger jeg begrebsforståelsen fra (Niss; 1996, p. 14):

> "Whenever substantive or insubstantive reasons, of whatever nature, are activated in support of the existence of mathematics education, we shall speak about an attempt to *justify* mathematics education."

[5] Andre formål som kan eksistere uden at have forbindelse til undervisningens årsager, kan fx være markering af overordnede politiske holdninger og legitimering af bestemte former for eksisterende undervisnings- og evalueringspraksis.

Denne kategorisering kan ses som en uddybning af en klassisk og mere overordnet tilgang. Ifølge denne er uddannelsessystemets rolle i samfundet dels at indføre eleverne i samfundets mangeartede facetter og tænkemåder, altså indførelsen i samfundets særegne kultur, og dels at udstyre dem med teknikker og metoder, som er nødvendige for at kunne klare sig og deltage i samfundets funktioner, fx. det at kunne skrive, læse og regne. De to roller kaldes henholdsvis *den socialiserende og kvalificerende rolle*[6]. Med denne forståelse er de politisk/kulturelle årsager udtryk for et ønske om socialisering, mens de økonomisk/tekniske og individorienterede årsager er udtryk for et ønske om kvalificering.

Næste kapitels analyse af den eksterne fagopfattelse går blandt andet ud på at afdække, med hvilken tyngde årsagstyperne er repræsenteret, dels i de eksplicitered formål for den almendannende matemtikundervisning, dels i de begrundelser der fremføres i diskussioner om matematik og matematikundervisning. Formålet er ikke at ende op med en total kortlægning, men at etablere nogle bestemte syn med *klare* karakteristika, der kan danne baggrund for analysen af potentialerne ved at arbejde med matematiske modeller i undervisningen.

3.2 Et kognitions-psykologisk perspektiv?

Med en *kognitions-psykologisk analyse* menes som før nævnt (side 20) en psykologisk tilgang til de *erkendelsesmæssige* (intellektuelle) dele af en læringsproces. I forhold til helt bredt at tage teorier om læring som udgangspunkt ligger der heri to væsentlige afgrænsninger.

3.2.1 Læring vs. kognition

Den ene afgrænsning vedrører emnet. *Kognition* er en samlet betegnelse for de *intellektuelle funktioner* som hjernen udfører. Det drejer sig bl.a. om funktioner som tænkning, sprog, hukommelse, forståelse og problemløsning (se fx Best; 1999). Funktioner som disse repræsenterer imidlertid kun den ene halvdel af, hvad der er bestemmende for hvilken form for læring der finder sted i en given situation. Den anden halvdel udgøres af det *affektive* domæne, som dækker alle *følelsesmæssige funktioner* som angst, glæde, mismod, afmagt, tilfredshed, frustration, kedsomhed, entusiasme osv..

Hvilke af disse følelser den lærende oplever, er man med tiden blevet klar over er helt afgørende for udbyttet af en given undervisning. At jeg ikke gennemfører en analyse med udgangspunkt i de affektive faktorer,

[6] Se endvidere fx Christiansen (1989); Undervisningsministeriet (1978a).

skal således ikke tages som udtryk for en manglende erkendelse af betydningen heraf. Det skyldes ene og alene behovet for at afgrænse analysens udgangspunkt, og at jeg i den henseende har erfaret, at der godt kan komme værdifulde bidrag ud af en analyse af de kognitive faktorer alene.

3.2.2 Psykologi vs. kognitiv psykologi

Den anden afgrænsning vedrører valget af psykologi som det teoretiske udgangspunkt. Psykologi er nemlig i dag blot en af mange videnskabelige discipliner der beskæftiger sig med kognitive processer, hvorfor det kun at anlægge et psykologisk perspektiv er udtryk for fravalg af mange andre relevante tilgange. Det er derfor relevant at karakterisere, hvad der ligger – og ikke ligger – i netop en psykologisk tilgang.

For at indkredse hvilke problemfelter og arbejdsmetoder der karakteriserer kognitiv psykologi, vil jeg give et kort rids af, hvordan psykologis udvikling som videnskab ifølge Anders Gade (1997) hænger sammen med opblomstringen af interessen for kognitive processer i løbet af 60'erne.

Behaviorismen

Psykologi er som videnskabelig disciplin groet frem af filosofi, og betragtes som sådan kun som værende fra omkring 1860. De første ca. 50 år blev der eksperimenteret med at studere den menneskelige bevidsthed ved at lade forsøgspersoner fortælle om deres oplevelser under varierende forsøgsbetingelser, såkaldt *introspektion*. Denne metode til at studere menneskets kognitive funktioner blev dog aldrig bredt accepteret. De første knap 100 år af den psykologiske videnskabs historie som selvstændig disciplin kan derfor bedre karakteriseres ved, at man primært fokuserede på *adfærd* snarere end på kognitive processer. Man forsøgte at finde systematiske sammenhænge mellem perceptuelle (sansemæssige) input og handlemæssige output. Hvad der skete herimellem blev betragtet som en fascinerende "sort boks" der desværre var utilgængelig for videnskabelig udforskning (Gade; 1997, pp. 93-96).

Den dominerende retning indenfor den adfærds-baserede forskningstradition var og er *behaviorismen*. Den russiske fysiolog Ivan Pavlovs berømte forsøg med hunde er et klassisk eksempel. Pavlov demonstrerede, at man kan kontrollere adfærden hos dyr med en vis intelligens ved på passende vis at stimulere dem, når de opfører sig i retning af det man ønsker. En sådan høj grad af forudsigelse og kontrol af adfærd er karakteristisk for behaviorismen, og er en væsentlig forklaring på den succes den opnåede.

I en læringsmæssig kontekst lægger den behavioristiske tilgang vægt på at tilrettelægge undervisningen, så eleverne "formes" til at kunne udføre givne handlinger. Dette sker bedst ved såkaldt "programmeret instruktion", hvor hver type indsigt eller beregningsmæssig formåen inddeles i mindre dele, som eleverne så med passende stimulans kan guides igennem skridt for skridt, for til sidst at mestre helheden. Den læringsmæssige hypotese, som denne fremgangsmåde baserer sig på, er, at den rette sekvens af erfaringer, repeteret med passende frekvens, genererer den rette læring.

Gestalt-psykologien

Den væsentligste samlede opposition til behaviorismen før Anden Verdenskrig var *gestalt-psykologien*[7]. Grundtanken her var at vi som mennesker opfatter i helheder og reagerer som helheder, og at disse helheder er mere end summen af de enkelte dele. Grundlæggende mente gestalt-psykologerne, at de "mentale strukturer" er alt for komplekse til at det giver mening kun at analysere forholdet mellem stimulus og respons. Man måtte forsøge at analysere hvordan hjernen bearbejder de sanseindtryk, den modtager. Selv argumenterede gestalt-psykologerne for, at hjernen på basis af stort set medfødte egenskaber organiserer sanseindtryk, så "det samlede billede" bliver mest harmonisk og giver størst mulig mening, en teori de formulerede i de såkaldte Gestalt-love (Gade; 1997, pp. 177-80).

I forhold til læring betød grundtanken om opfattelse i helheder og teorien om hjernens meningssøgende funktion, at behavioristernes ide om "programmeret instruktion" blev forkastet. Schoenfeld (1987a, pp. 3-4) omtaler en klassisk gestalt-psykologisk fremstilling af Max Wertheimer fra 1945; *Productive Thinking*. Her argumenterer Wertheimer for, at selv om elever undervist efter den behavioristiske model nok lærer at mestre visse procedurer, så er der tale om overfladisk udenadslære. Og viden opnået på denne vis vil højst sandsynligt hverken være fleksibel eller brugbar i en række forskelligartede situationer. Han giver som et af flere eksempler, at mange elever der blev betragtet som mestrende aritmetikken, ikke forstod meningen med disse procedurer, og derfor udregnede

$$\frac{857+857+857+857+857}{5}$$

ved møjsommeligt at addere de fem identiske tal i tælleren og dividere

[7] Navnet kommer af at disse psykologer arbejdede med opfattelsen af en figur i forhold til dens baggrund. De kaldte figuren for en "gestalt", hvormed de mente en organiseret helhed. En klassisk illustration af det komplekse i forholdet mellem figur og baggrund er Rubins vase, der enten kan ses som en hvid vase på en sort baggrund, eller – for en af pointerne er at man ikke kan se begge på en gang – som to sorte ansigter (der i det første tilfælde danner konturerne af vasen) på en hvid baggrund. Se evt. Gade (1997, pp. 177-78).

resultatet med fem, hvilket unægteligt er helt overflødigt, hvis man forstår hvad division er.

Gestalt-psykologiens resultater var svære at omsætte til undervisningsmæssige retningslinjer. Selv om dens mål om en dybere begrebsforståelse som vi skal se er magen til, hvad meget senere kognitions-psykologisk forskning påpeger som en central pointe, så var deres fremstilling udelukkende beskrivende og ikke konstruktiv i forhold til hvordan disse mål kunne nås, og deres program blev aldrig ført til ende (Ibid.).

Den kognitive revolution

Sidst i 40'erne var der en stigende erkendelse af at behaviorismen var for indsnævrende. Flere og flere mente som gestalt-psykologerne at det var nødvendigt at forsøge at åbne den "sorte boks" ved at analysere emner som tænkning og sprog og begreber i forbindelse med mentale repræsentationer, hvorfor kognitiv psykologi fra sidst i 50'erne var almindeligt accepteret som forskningsfelt.

Det skyldtes ikke mindst en række indflydelsesrige enkeltpersoner der allerede i tiden før Anden Verdenskrig var i opposition til behaviorismen, og hvis resultater har fået varig betydning. Jean Piaget forsøgte på grundlag af en række eksperimenter at beskrive børns kognitive udvikling. Sammen med Jerome Bruners arbejde vedrørende betydningen af forskellige måder at repræsentere begreber på blev Piagets arbejde brugt til at legitimere indførelsen af 60'er-matematikken i grundskolen, hvilket i sig selv er en interessant historie. Men da Piagets arbejde fokuserer på børn under teenagealderen, og i øvrigt nok er det mest velbeskrevne psykologiske perspektiv på matematikundervisning overhovedet, har jeg – med mit fokus på det gymnasiale niveau – valgt at lægge arbejdsindsatsen andre steder.[8]

Den ide der kom til at konstituere kognitiv psykologi som forskningsfelt, blev at analysere menneskets evne til *informations-behandling*: Den information som hjernen modtager, forsøgte man fra forskellige indgangvinkler

[8] Også det socio-kulturelle perspektiv på de kognitive processer med L. S. Vygotsky i spidsen har jeg afgrænset mig fra at gå ind i i dette projekt. Man kan diskutere om det kan betegnes som et kognitions-psykologisk perspektiv på læring og forståelse, og derfor naturligt hører hjemme i en analyse som den jeg gennemfører her. Vygotskys perspektiv er bl.a. konstitueret ved dets fokus på betydningen af sociale processer, mens kognitiv psykologi pr. tradition arbejder med det enkelte individ som analytisk objekt.

Denne forskellighed er baggrunden for at jeg ikke har fundet det urimeligt at se bort fra det socio-kulturelle perspektiv i dette projekt, men der er tale om en noget modvillig afgrænsning, for jeg er i løbet af projektet blevet overbevist om, at det vil være frugtbart at kombinere de to perspektiver – det socio-kulturelle og det kognitions-psykologiske som det fremlægges i dette kapitel – i analyser af arbejdet med matematiske modeller i matematikundervisningen.

at følge fra sanserne over perception, opmærksomhed og hukommelse til vidensrepræsentation og handling (Gade; 1997, p. 98).

Ideen om informations-behandling som tilgang til analyser af menneskets kognitive funktioner satte gang i en udvikling inden for flere beslægtede videnskabelige discipliner. Inden for både antropologi og lingvistik dannedes forskningsfelter med speciale i de kognitive funktioner knyttet til informations-behandling[9], og med basis i matematik og logik samt fremkomsten af de første computere opstod kunstig intelligens som et helt nyt forskningsfelt. Desuden har der, længe før disse videnskaber entrede scenen, været interesse for de kognitive funktioner på et overordnet plan inden for filosofi, og på en meget direkte måde indenfor neurologi, og også på disse felter begyndte man at interessere sig for informations-behandling.

Grænserne mellem disse parallelle udviklinger er ifølge Anders Gade (1997, p. 104) med tiden blevet mere og mere udvisket, og man arbejder i stigende grad på tværs af de videnskabelige discipliner. Herved opstår det nye videnskabelige felt *kognitionsforskning*, som udover interessen for de kognitive funktioner er karakteriseret og afgrænset ved at arbejdet baseres på en række *videnskabelige grundantagelser*:

> “A basic assumption underlying work in cognitive science is that mental structures and cognitive processes (loosely speaking, ‘the things that take place in your head’) are extremely rich and complex – but that such structures can be understood, and understanding them will yield significant insights into the ways that thinking and learning take place.” (Schoenfeld; 1987a, p. 2)

Herudover er der endnu en grundantagelse som er vigtig at være opmærksom på, når man skal fortolke forsøg på at uddrage undervisningsmæssige konsekvenser af resultater fra kognitionsforskning: Kognitionsforskere er enige om, at nogle faktorer som ganske vist er væsentlige for kognition, alligevel indtil videre må udelades eller nedtones, fordi de ellers ville komplicere forskningen unødvendigt. Det væsentligste forsømte område er de førnævnte affektive forhold, men også betydningen af historiske og kulturelle forhold negligeres (Gade; 1997, p. 106).

Hvad angår *arbejdsmetoden* er der ifølge Schoenfeld (1987a, pp. 7-9) sket et markant skift i løbet af kognitionsforskningens ca. 50-årige historie. Fra starten i 50’erne og frem til sidst i 70’erne arbejdede man overvejende naturvidenskabeligt inspireret: Mange forsøgspersoner underkastet varierende forsøgsbetingelser, og deraf følgende store datamængder som man

[9] Meget af interessen samlede sig om forholdet mellem sprog og tanke: Er vores sproglige udtryksmuligheder bestemmende for, hvordan vi ser og opfatter verden, eller er sproget blot en måde at lette kommunikationen med andre på, og således uden dominerende indflydelse på vores måde at tænke på? Se evt. Gade (1997, p. 308ff.).

analyserede ved hjælp af statistiske metoder. Det var og er den metode man benytter i videnskabelige eksperimenter, hvor de indgående variable størrelser kan underlægges kontrol udefra.

At benytte metoder som disse i kognitionsforskning forudsætter en tro på, at forskelle i den læringsmæssige "behandling" viser sig som statistisk signifikante forskelle i efterfølgende testresultater. En så forsimplet tilgang til læringsprocesser viste sig imidlertid mere og mere uholdbar, efterhånden som flere og flere forskningsresultater blev publiceret uden at give indtryk af nogen øget forståelse. Fra midt i 70'erne var der derfor flere og flere forskere der anbefalede, at man gik over til at fokusere på den *proces* det enkelte *individ* gennemgår i forbindelse med forskellige intellektuelle udfordringer, hvilket fra sidst i 70'erne og frem har været den dominerende forskningsmetode.

3.2.3 Kognitiv psykologi og analysen i kapitel 5

Den beskrevne udvikling har gjort, at der er sket en opsplitning af kognitiv psykologi som videnskabeligt arbejdsområde, så man kan tale om i hvert fald fire hovedlinjer (Gade; 1997, p. 106):

1. *Eksperimentel kognitiv psykologi*, som anvender eksperimenter med udvalgte forsøgspersoner som den grundlæggende forskningsmetode.
2. *Kognitiv modellering vha. computere*, som på grundlag af computerberegninger forsøger at danne såkaldt komputationelle modeller, der simulerer hjernens kognitive processer.
3. *Kognitiv neuropsykologi*, som arbejder med modeller af hjernens struktur på grundlag af intakte og skadede færdigheder hos neurologiske patienter.
4. *Kognitiv neurovidenskab*, som ved hjælp af moderne scannings-metoder undersøger, hvordan både raske og syge hjerner arbejder i forbindelse med forskellige kognitive eksperimenter.

Computersimuleringer har jeg dels ringe forudsætninger for at gå ind i en diskussion af, dels er denne tilgang efter at have været den dominerende i 70'erne nu omgærdet af en vis skepsis i psykolog-kredse, og bruges primært af forskere med interesse for computerens og ikke hjernens muligheder. Kognitiv neuropsykologi er – som det er afgrænset her – mindre interessant at inddrage, fordi det vedrører defekter i hjernen og ikke normalt fungerende hjerner.

I kapitel 5 falder de fremlagte resultater derfor indenfor den første og den sidste af de fire kategorier.

4 Potentialer – et matematikfagligt perspektiv

4.1 60'er-matematikken: Påvirkninger "udefra"

Betegnelsen "den ny matematik" eller "60'er-matematikken" henviser ikke til en historisk periode, mest oplagt ti-året fra 1960-1970, men til en nytænkning og reformering af matematikundervisningen i det meste af den vestlige verden, der slog igennem i første halvdel af 60'erne.

I den danske gymnasieundervisning fik den formelt fodfæste med en bekendtgørelsesændring i september 1961, og var en realitet fra og med skoleåret 1963/64. Det er et gradsspørgsmål at afgøre, hvornår de tanker der lå bag reformen, ikke længere dominerede den officielle politik vedrørende gymnasiets matematikundervisning. Min fornemmelse er, at reformen stadig øvede væsentlig indflydelse sidst i 70'erne, og lovgivningsmæssigt blev der først givet udtryk for markant anderledes ideer med den bekendtgørelse for gymnasiets matematikundervisning som trådte i kraft i 1988.

I det følgende vil jeg etablere grundlaget for en karakteristik af den eksterne fagopfattelse bag "60'er-matematikken" ved at give et rids af, hvilken samfundsudvikling i almindelighed og diskussioner med relation til matematikundervisningen i særdeleshed reformen var et resultat og en del af.

4.1.1 Tiden før Anden Verdenskrig

Anvendelsesorienteringen til diskussion

I de første årtier af det 20. århundrede var der i det meste af den vestlige verden – Danmark inklusive – en voksende *anvendelsesorientering* i diskussionerne om matematikundervisningens berettigelse og udformning tæt knyttet til industrialiseringen. I modsætning til tidligere tiders noget ensidige fokusering på matematiks æstetiske og formative kvaliteter, skulle der nu også lægges vægt på at demonstrere matematik som et nyttigt fag.[1] Denne nyorientering satte sig kraftigt igennem i den primære matematikundervisning, som i Danmark foregår i grundskolen, hvorimod undervisningen på det sekundære niveau, som i Danmark udgøres af de gymnasiale uddannelser, fortsatte stort set uanfægtet med fokus på de "indre" kvaliteter.

Man kan nævne i hvert fald to grunde til at dette var tilfældet (Niss; 1987, p. 488). En *indholdsmæssig* grund var, at bredden i matematiks faktiske anvendelser indenfor andre videnskaber og i forbindelse med hverdagsrelaterede praktiske gøremål var langt mindre end tilfældet er nu. Videnskabeligt var anvendelserne traditionelt koncentreret om de eksakte videnskaber, landmåling, forsikringsberegninger og nogle få områder indenfor økonomi. Dette forhold ændrede sig dog gradvist gennem den første del af det 20. århundrede, specielt qua udviklingen af matematisk statistik[2], men det varede længe før disse nye tendenser satte sig spor i den sekundære matematikundervisning. Hvad angår de hverdagsrelaterede matematikanvendelser gjorde de essentielt kun brug af aritmetik og i mindre grad simpel plangeometri, altså emner der også dengang lå i den primære matematikundervisning.

En *sociologisk* grund var, at det kun var en lille minoritet af en ungdomsårgang – fremtidens sociale elite – der modtog sekundær matematikundervisning. For så godt som alle skete det med henblik på fortsatte studier på et universitet eller en anden højere læreanstalt, primært indenfor de teknisk eller naturvidenskabeligt prægede videnskaber (ingeniører, arkitekter, fysikere, læger, aktuarer mv.). Hovedparten af de heldige få ville derfor tids nok møde matematik i anvendelse. Det samfundsmæssige behov for at demonstrere anvendelighed allerede på det sekundære niveau føltes således meget begrænset.

Danske gymnasiediskussioner og -formålserklæringer

Også lokalt i Danmark var der debat om anvendelsers rolle i gymnasiematematikken. Diskussionerne, som næsten udelukkende handlede om anvendelser med udgangspunkt i problemstillinger fra de eksakte videnskaber og rentesregning, handlede kort sagt om det hensigtsmæssige ved at vise nye sider af matematikken og fremme især den fysiske forståelse gennem inddragelse af eksempler herfra i matematikundervisningen, kontra

[1] Se fx Griffiths & Howson (1974, pp. 16-19), Niss (1987, pp. 488-89) og Niss (1996, pp. 27-29).

[2] Som eksempel kan det nævnes, at den økonomisk-statistiske disciplin *økonometri*, der danner kernen i de nu politisk meget potente makroøkonomiske modeller, blev etableret i mellemkrigstiden. Se eventuelt Dræby et al. (1995) for en fremstilling af denne udvikling.

det åndsudviklende ved "ren" matematikundervisning. Argumenterne for hver af disse positioner angik såvel *formålet* med gymnasiematematikken som effektiviteten af de to positioner som *middel* til at opnå et givet formål (Pilemann; 1996, pp. 47-55). I den forbindelse er det interessant at bemærke, at det langt fra ensidigt er almendannende hensyn der fremføres som (subjektiv) begrundelse for større anvendelsesorientering. Et tidligt bekendtskab med naturvidenskabelige matematikanvendelser nævnes også som et effektivt middel i studieforberedende øjemed, samt som en effektiv og motiverende måde at tilegne sig matematisk viden på.

Debatten fandt sted i perioden mellem to bekendtgørelser for gymnasiets matematikundervisning som trådte i kraft i henholdsvis 1906 og 1935. I begyndelsen af det 20. århundrede var målet med matematikundervisningen på den matematisk-naturvidenskabelige linje tilsyneladende åbenlys, da det – i overensstemmelse med datidens internationale traditioner for læseplansudformning, jf. Niss (1996, p. 26f) – slet ikke omtales i bekendtgørelsen fra 1906, der udelukkende består af en detaljeret pensumbeskrivelse. Kun for den sproglige linje nævnes det eksplicit at formålet med matematikundervisningen ikke så meget er at

> "bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik [. . .] som at skole Elevernes Tænkeevne ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader" (Pilemann; 1996, pp. 46-47 og 253-54).

Altså en eksplicit sværgen til det der ofte betegnes matematikkens *formaldannende* egenskaber.

I bekendtgørelsen fra 1935 blev der taget hensyn til begge de to positioner i debatten, men de kom meget forskelligt til udtryk for den sproglige og den matematisk-naturvidenskabelige linje. For den sproglige linje ændredes prioriteringen i fremstillingen radikalt, idet målet nu blev at demonstrere matematiks anvendelighed, mens den teoretiske præsentation skulle styres heraf.[3]

[3] Den præcise ordlyd i bekendtgørelsen er (efter Pilemann; 1996, pp. 255-56):

> "Formaalet [målet] med Undervisningen er at give Eleverne Kendskab til visse vigtige Anvendelser af Matematikken. Af de teoretiske Afsnit medtages saa meget, at dette Formaal kan opfyldes. [. . .] Ved Undervisningen skal Hovedvægten lægges paa Matematikkens Anvendelse i det praktiske Liv inden for de i Anordningen givne Rammer. Ved valg af Øvelseseksempler bør man derfor, overalt hvor det er muligt, søge tilknytning til det praktiske Liv. Tillige bør der inddrages Materiale (Tabeller og grafisk Afbildning), som finder Anvendelse ved Undervisningen i andre Fag, f.Eks. Naturfag og Historie."

For den matematisk-naturvidenskabelige linje, der nu fik en egentlig målsbeskrivelse, var det derimod den indre sammenhæng i præsentationen der blev sat i centrum, mens anvendelsesorienteringen skulle tilgodeses gennem samarbejde med de andre naturvidenskabelige fag.[4]

Hvordan reaktionerne på denne udvikling i matematikundervisningens officielle målbeskrivelser og de samfundsmæssige forandringer var, må vi springe frem til efter Anden Verdenskrig for at vurdere, da der ikke var meget overskud til at forholde sig til matematikundervisningens formål og praksis i det mellemliggende tiår.[5]

4.1.2 Tiden efter Anden Verdenskrig

Årene efter Anden Verdenskrigs afslutning var i alle de vesteuropæiske lande præget af store omvæltninger i måden samfundet var indrettet på. I Danmark blev etableringen af en velfærdsstat[6] det dominerende politiske projekt.

Internationalt pres for uddannelsesreformer

Eftersom ansvaret for arbejdskraftens vidensniveau var og er en af uddannelsessystemets helt centrale funktioner er det ikke så overraskende, at man fra politisk side følte behov for mere gennemgribende ændringer af

[4] Her lyder den præcise ordlyd (ibid.):

> "Formaalet [målet] med Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de Reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelse af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer i Planen som i Rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger. [...] Undervisningen bør i saa høj Grad som muligt tilstræbe en Sammenhæng melle de forskellige Dele af Stoffet, og Funktionsbegrebet træder herved naturligt i Forgrunden. [...] Der bør tilstræbes et Samarbejde med de Fag, specielt Fysik, hvor Matematikken kan komme til Anvendelse. Ved Planlæggelsen af Undervisningen bør der derfor tages saadanne Hensyn, at dette Samarbejde kan blive frugtbart."

[5] Det betyder ikke, at matematik som *videnskab* ingen opmærksomhed fik i tiden omkring Anden Verdenskrig. Men matematik som *undervisningsfag* blev ikke viet samme interesse som både før og efter krigen.

[6] Begrebet *velfærdsstat* bruges for samfund, hvis indretning bl.a. er karakteriseret af høj grad af social sikkerhed, dvs. samfund hvor den sociale stratifikation (lagdeling) nok eksisterer, men er relativt lav. Nogen bruger betegnelsen *socialstat* om samme type. En velfærdsstat er karakteriseret ved at befolkningens velfærd er et formuleret mål i den offentlige politik, og at staten træffer aktive tiltag for at nå dette mål. En velfærdsstat er altså en *aktiv* stat, der *intervenerer* i de frie markedskræfters spil med henblik på omfordeling af ressourcerne.

uddannelsessystemet som reaktion på de nye samfundsstrukturer der var under udvikling.[7] Den kraftige økonomisk vækst der i løbet af 50'erne blev en realitet i hele den vestlige verden, muliggjorde at der kunne afsættes mange ressourcer til gennemførelsen af disse ændringer.

I de vestlige lande var der bred enighed om, at det var økonomisk fremgang der var samfundets overordnede formål med den uddannelsesmæssige satsning. I den forbindelse var der en stadig større enighed om, at store *mængder* arbejdskraft ikke i sig selv var svaret, men at arbejdskraftens *vidensniveau* – "the human capital" – var nok så væsentlig. Et afgørende kvalifikationskrav var således kompetence i at udvikle og udnytte redskaber som forøger de menneskelige udfoldelsesmuligheder, for herigennem at opnå øget produktivitet. Det vil jeg referere til som *teknologisk kompetence*, hvilket svarer til datidens optimistiske teknologibegreb, der opfatter teknologien som "en størrelse mennesket indskyder mellem sig og naturen" for bedre at kunne få magt over naturen og nyttiggøre den.[8] Herved bliver teknologisk udvikling per definition frihedsforøgende, hvilket afspejledes i datidens opfattelse af at det var en tilstrækkelig betingelse for et lykkeligere samfund (Skovsmose; 1980, pp. 10-13).

Både i USA og i Europa – hvor den økonomiske samarbejdsorganisation OEEC, det senere OECD[9] var den drivende kraft – blev hovedvægten lagt på at styrke og videreudvikle uddannelserne indenfor de eksakte naturvidenskaber, ikke mindst matematik, da det var ved at arbejde fornuftigt med disse fagområder man mente man kunne udvikle den ønskede teknologiske kompetence.

Teknikerkommissionen som et at flere danske initiativer

I Danmark besluttede den siddende regering i 1956 at nedsætte en række udvalg til belysning og afhjælpning af problemet med manglen på teknisk

[7] Ifølge Ole Skovsmose (1980, p. 12) fandt en lignende udvikling hvad den primære undervisning angår sted omkring 100 år tidligere i Danmark. Dengang gjorde Landboreformen at også den almindelige arbejder havde et behov for simpel aritmetik i forbindelse med beregninger af varemængder, priser og lignende. Da regning ikke tidligere var en obligatorisk del af den primære undervisning, der var centreret om "Guds saliggørende Kundskab", gennemførte man efterfølgende en skolereform; "Samfundet ændres, kvalifikationskravene ændres, og dermed ændres skolen."

[8] Jævnfør Jensen & Skovsmose (1986, kap. 1), hvor der også findes en god diskussion af forskellige opfattelser af relationen teknologi–frihed.

[9] OEEC; Organisation for European Economic Co-operation. Dannet i 1948 med de fleste vesteuropæiske lande som medlemmer, med det mål at tilrettelægge og fremskynde Europas økonomiske genopbygning, i første omgang som forvalter af den amerikanske Marshall-hjælp, senere ved egen drift. OECD; Organisation for Economic Co-operation and Development. Oprettet i 1961 som OEECs videreførelse tilføjet amerikansk og canadisk medlemskab, men med uændret mål (OECD; 1961, p. 4).

kvalificeret arbejdskraft. Det udvalg der skulle fungere som det centrale led i undersøgelserne, var den såkaldte *Teknikerkommission*, hvis konkrete opgave var

> "*at* opridse de tendenser, den fremtidige tekniske udvikling indebærer med hensyn til behovet for ingeniører og andre teknikere af forskellige faggrupper og kvalifikationsgrader, og
> *at* skitsere rammerne for den fremtidige tekniske uddannelse med henblik på at sikre en udvidelse og effektivisering af hele denne uddannelse."
> (Statsministeriet; 1959, p. 7)

Det er i øvrigt interessant, at der i Statsministeriets meddelelse om oprettelse af Teknikerkommissionen af 28. september 1956 nævnes at "[...] udvalget bør [endvidere] overveje de problemer, som kan opstå ved dannelsen af en stor samfundsgruppe af tekniske funktionærer" (Ibid., p. 88), og at denne formulering er fraværende i kommisionens egen fortolkning af kommissoriet i betænkningens forord.

Teknikerkommissionens anbefalinger kan over en bred kam siges at pege på det både rentable og nødvendige i øgede bevillinger til uddannelse på alle niveauer indenfor de naturvidenskabelige og tekniske områder. Blandt andet foreslås gymnasieskolernes kapacitet udvidet, og opførelsen af H. C. Ørsted Institutet sker på initiativ herfra.

Anvendelsesorientering i 50'erne

I Danmark fik diskussionen om anvendelsers rolle i gymnasiets matematikundervisning med stigende kraft igen mæle i løbet af 50'erne. Set i forhold til diskussionen der ledte op til bekendtgørelsesændringen i 1935, var der dog tale om en generel drejning i debatten. Ganske som før Anden Verdenskrig betones det studieforberedende mål med den matematisk-naturvidenskabelige gymnasieundervisning, men i pagt med tiden sker det nu med udgangspunkt i en økonomisk/teknisk begrundelse frem for den førhen dominerende politisk/kulturelle begrundelse. Den økonomisk/tekniske årsags mere og mere objektive status gjorde, at diskussionen i gymnasiekredse gradvist kom til næsten udelukkende at handle om anvendelsers effektivitet som middel i forbindelse med den matematiske begrebstilegnelse, og ikke som tidligere også om inddragelsen af eksempler på anvendelser som led i at tjene et almendannende formål, jf. omtalen på side 41.

Ved den bekendtgørelsesændring der fandt sted i forbindelse med en revidering af grundloven i 1953, kom denne nye holdning meget håndgribeligt til udtryk. For den sproglige linjes vedkommende havde man det indtryk, at 1935-bekendtgørelsens opprioritering af anvendelsers rolle i undervisningen havde medført ringere forståelse, ikke bedre som man havde håbet. Desuden havde matematikundervisning for denne elevgruppe aldrig haft en studieforberedende begrundelse, og det var følgelig ikke herfra man skulle hente de primære bidragydere i forbindelse med den teknologiske "oprustning". Blandt andet af disse årsager valgte man derfor at tage matematik helt ud af fagviften på den sproglige linje.

På den matematisk-naturvidenskabelige linje skulle der i forhold til tidligere lægges yderligere vægt på begrebsmæssig sammenhæng og stringens i præsentationen[10], mens erfaring med anvendelser at matematikken stadig skulle foregå ved samarbejde med specielt fysik (Pilemann; 1996, p. 105 og 123).

I årene efter bekendtgørelsesændringen i 1953 blev anvendelsers rolle bedømt gradvist mere positivt. Den almindelige holdning var, at en vis anvendelsesorientering i selve matematikundervisningen ville virke fremmende på den generelle lyst til at studere faget, hvilket også i Danmark ansås for at være en nødvendig forudsætning for opnåelsen af den så eftertragtede teknologiske kompetence. Lærebøgerne til gymnasiet kom derfor til at indeholde et mindre antal eksempler på anvendelser, primært fra fysik, astronomi, rentesregning og kombinatorik, og der gennemførtes forsøg med indførelsen af sandsynlighedsregning, der oplagt kan præsenteres anvendelsesorienteret (Ibid., p. 109 og 123ff).

Mere grundlæggende skolereformer igangsættes

Troen på matematiks produktive egenskaber og den afledte betoning af økonomisk-teknologiske årsager til at udbyde matematikundervisning på det sekundære og tertiære niveau, fik i løbet af 50'erne så stor udbredelse i Danmark, at den spirende begrundelsesdiskussion fra før Anden Verdenskrig blev helt overflødiggjort og derfor for en tid næsten forstummede. I stedet blev ressourcerne brugt på at overveje hvordan form og indhold for "den ny matematik" skulle være.

Disse overvejelser blev der åbnet mulighed for at omsætte i egentlige reformer med vedtagelsen af en ny skolelov for både grundskolen og gymnasiet i 1958. Alle de hidtidige bekendtgørelsesændringer for gymna-

[10] Den præcise ordlyd i bekendtgørelsen er (efter Pilemann; 1996, p. 257):

> "Formålet [målet] for undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udførelsen af numeriske beregninger. [...] Undervisningen bør i så høj grad som muligt tilstræbe en sammenhæng mellem de forskellige dele af stoffet, og funktionsbegrebet træder herved naturligt i forgrunden."

siet havde hvilet på almenskoleloven fra 1903, så vedtagelsen af den nye skolelov kan først og fremmest ses som et klart signal om, at man nu ønskede mere gennemgribende ændringer. Hvilke ændringer der konkret skulle gennemføres, lod man fra politisk side være op til to læseplansudvalg for henholdsvis grundskolen og gymnasiet at komme med forslag til. Resultatet var betænkningerne "Undervisningsvejledning for folkeskolen" og "Det nye gymnasium" (Undervisningsministeriet; 1960), der begge udkom i 1960.

Folkeskolebetænkningen, der efter farven på omslaget også kaldes "Den blå Betænkning", gør ikke overraskende opmærksom på, at datidens samfundsmæssige udvikling gjorde nye typer af kvalifikationer nødvendige. Også her er teknologi-optimismen tydelig. Men ifølge Høyrup (1979, pp. 54-56) og Iversen (1996, pp. 24-25) bliver der eksplicit givet udtryk for, at det i forbindelse med en større skolereform som den igangværende også var vigtigt at sætte fokus på meget andet end forhold der direkte relaterede sig til uddannelsernes form og indhold, som udviklingen af teknologisk kompetence typisk gjorde. Således lød det om folkeskolens overordnede formål:

> "Det er skolens formål at dygtiggøre børnene til at gå ud i samfunds- og erhvervslivet, velegnede til at opfylde de krav, man med rimelighed kan stille, men først og fremmest er det skolens opgave at fremme alle muligheder for, at børnene kan vokse op som harmoniske, lykkelige og gode mennesker" (citeret efter Iversen (1996, p. 25)).

Sidste del af denne formålsbeskrivelse indikerer kraftigt, at den individorienterede årsag havde en fremskudt placering hvad den generelle grundskoleundervisning angår.

I gymnasiebetænkningen – der selvforklarende får tilnavnet "Den røde Betænkning" – bliver der i de indledende ikke-fagspecifikke afsnit ligeledes diskuteret forhold der rækker langt udover selve læseplansudformningen. Her argumenteres der imidlertid på en måde, der mest rimeligt kan fortolkes som havende rod i en politisk/kulturel begrundelse for at udbyde undervisning på gymnasialt niveau. Diskussionen er meget præget af overvejelser i forbindelse med et nu udtalt behov for at finde en balance mellem gymnasiets almendannende og studieforberedende hensyn. De studieforberedende hensyn trækker i retning af en stadig mere specialiseret arbejdskraft med behovet for teknologisk kompetence brugt som eksempel: "Eksempelvis vil automatiseringen jo kræve en helt ny type medarbejdere med en ny og højere, teknisk, uddannelse" (Undervisningsministeriet; 1960, p. 16). En sådan specialisering igangsat allerede på det gymnasiale uddannelsesniveau kan imidlertid let komme i konflikt med de almendannende hensyn, der i en politisk/kulturel begrundelses-sammenhæng har uddannelsen af eleverne til velfungerende borgere i et demokratisk samfund som et centralt element:

> "En befolkning sammensat af specialister, der betragter omverdenen ud fra snævert faglige synspunkter uden kendskab til og forståelse af den øvrige befolknings kår og anskuelser, har dårlige forudsætninger for at føre samfundet videre i samarbejde efter demokratiske principper. [...] *Forholdet mellem individ og samfund og forholdet mellem de enkelte individer i et demokratisk samfund* rejser også problemer, der har tilknytning til skolen. De enkelte skal have så meget kendskab til biologi, geografi, historie, økonomi, sociale forhold og samfundets funktioner, at de har forudsætninger for at tage kritisk stilling til offentlige anliggender og modstå propaganda ved at klargøre sig dens egentlige hensigter og sammenholde den med de faktiske forhold" (Undervisningsministeriet; 1960, pp. 16-17).

Rent organisatorisk er det overvejelser som disse der er baggrunden for indførelsen af det grendelte gymnasium, som sker direkte på foranledning af betænkningens anbefalinger (Ibid., p. 28f). På den sproglige linje skal eleverne nu efter 1.g. vælge mellem ny-sproglig, gammel-sproglig og den nye samfunds-sproglige gren, og på den tidligere matematisk-naturvidenskabelige linje står det tilsvarende valg mellem matematisk-fysisk, matematisk-naturfaglig og matematisk-samfundsfaglig gren.

Matematikundervisning i "Det nye gymnasium"

Jeg vil ikke her indlede en længere diskussion af ønsket om at uddannelsessystemet er med til at udvikle en *demokratisk kompetence* hos befolkningen. Når jeg alligevel vælger at referere ovenstående passager fra gymnasiebekendtgørelsens ikke-fagspecifikke afsnit er det fordi der er en pointe i at sammenholde disse tilkendegivelser med de efterfølgende fagspecifikke bemærkninger om matematik.

I afsnittet om læseplaner og eksamenskrav for matematik (Undervisningsministeriet; 1960, pp. 45-47) foreslås det at matematik genindføres som obligatorisk fag på den sproglige linje. Senere begrundes det direkte med studieforberedende hensyn, idet man har villet imødekomme universiteternes ønske om, at kunne optage sproglige studenter på medicin- og statsvidenskabs-studierne uden aflæggelse af tillægsprøve. Først sekundært nævnes hensynet til, at også disse studenter får "et indblik i matematisk-naturvidenskabelig tænkning og arbejdsmetode" (Ibid., p. 148). For matematisk linje nævnes det eksplicit, at forslaget til læseplan for matematik er udformet med et dobbelt mål for øje: Dels skal eleverne gives "et fond af konkrete matematiske værktøjer" som de skal opøves i at anvende både i og uden for matematikken, dels skal de have mulighed for at "indleve sig i nogle karakteristiske sider af matematisk metode" (Ibid., p. 45). I det konkrete forslag, der efterfølgende blev ordret indskrevet i selve bekendtgørelsen af 1961 (se Pilemann; 1996, p. 258), resulterer det i følgende målbeskrivelse (Undervisningsministeriet; 1960, p. 58):

> "Formålet [målet] med undervisningen er
> at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange,
> at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
> at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,
> at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske regninger, samt
> at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder."

Afhængigt af hvad man lægger i ordet "fortrolig", som traditionelt er et stærkt ord i matematiklæseplaner, kunne sidste sætning godt læses som matematikundervisningens forsøg på at bidrage til, at eleverne rustes til at "tage kritisk stilling til offentlige anliggender og modstå propaganda ved at klargøre sig dens egentlige hensigter og sammenholde den med de faktiske forhold", jf. citatet fra gymnasiebekendtgørelsens ikke-fagspecifikke afsnit. Det ville imidlertid stille krav til den anvendelsesorientering, der gives udtryk for i målsbeskrivelsens sidste del. Den skulle være så ambitiøst tænkt at den inkluderede træning af elevernes evne til *selvstændigt* at vurdere offentlige anliggender, også ved substantiel inddragelse af matematik, samt udfordrede dem til kritisk at vurdere sådanne matematikanvendelser i forhold til de faktiske forhold.

At det højst sandsynligt ikke er denne betydning der ovenfor refereres til med snakken om at være "fortrolig med anvendelser af matematik", fremgår bl.a. af betænkningens kommentarer til et af de mest styrende elementer i matematikundervisningens praksis; udformningen af de skriftlige eksamensopgaver. I det konkrete forslag til ordlyd, der igen blev ordret gengivet i den endelige bekendtgørelse af 1961, hedder det, at der lejlighedsvis bør stilles opgaver som kan undersøge, om eleven har forståelse for matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. Dette er tilføjet en eksamensjuridisk bemærkning om at "i disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje præciseres" (Ibid., pp. 116-17). Denne bemærkning antyder at tanken ikke er at udfordre eleven i det amorfe grænseland mellem matematikken og den omgivende verden, hvor en vurdering af hvad der er rimelige præmisser at arbejde med er en central del af udfordringen.

Derimod kan målet med at stille anvendelsesorienterede eksamensopgaver meget vel have været at demonstrere, at den matematik eleverne forventes at beherske faktisk *har* et anvendelsespotentiale, som man i kraft af en tyrkertro på transfer regner med eleverne bliver i stand til at indfri. Rimeligheden af denne fortolkning forstærkes ved igen at vende blikket mod betænkningens mere kommenterende afsnit om matematik, hvor det om den skriftlige eksamen hedder:

> "Endelig foreslås det udtrykkelig udtalt, at der ved eksamen kan stilles opgaver, der vedrører matematikkens anvendelse på andre fagområder. Med en sådan bestemmelse mener man at fremme interessen for det islæt i undervisningen, der peger ud mod fagets anvendelser" (Ibid., p. 47).

I de almindelige bemærkninger om selve undervisningen nævnes det også at der lejlighedsvis bør finde en behandling sted af opgaver og eksempler hentet fra andre fagområder. bl.a. hedder det:

> "Dette *eksempelmateriale* bør være varieret og *illustrere* anvendelser af de gennemgående afsnit af matematikken i den udstrækning det er muligt." (Ibid., p. 90, min kursivering).

Endelig er det i denne sammenhæng væsentligt at påpege at jeg – på trods af de omtalte anvendelsesorienterede tiltag af både politisk og mere snævert undervisningsrelateret karakter – på intet tidspunkt i perioden før 61-bekendtgørelsen er stødt på aktiviteter eller bestemmelser, der kan fortolkes som et ønske om at udvikle en egentlig kompetence i at anvende matematikken *som en del af selve matematikundervisningen* på den matematisk-naturvidenskabelige gren.

At dette ikke skyldes tilfældigheder eller sjusk fra min side kan sandsynliggøres ved at se på indholdet af de skriftlige eksamensopgaver i den periode, jeg hidtil har omtalt (gengivet i Pilemann; 1996, pp. 78-79 og 115). I perioden 1910-35 var der i alt kun 12 studentereksamensopgaver i matematik der overhovedet nævner problemstillinger uden for matematikkens verden, mens det tilsvarende antal for perioden 1935-60 var blot 4 opgaver! Billedet synes tydeligt: Interessen for anvendelsesorientering har – både før og omkring bekendtgørelsen af 1961 – udelukkende været i motiverende øjemed.

De interessante spørgsmål går nu i retning af *hvorfor* det var tilfældet: Hvorfor er 60'er-matematikken ikke karakteriseret ved en mere radikal orientering mod anvendelser af matematik end tidligere, når det tilsyneladende var et væsentligt element i datidens generelle reformønsker? Er det tilfældigt at matematik i citatet på side 47 ikke nævnes i rækken af fag, som eleverne i demokratiets navn *må* kende til? Blandt andet for at kunne svare på spørgsmål som disse må vi nu igen tilbage i tiden, denne gang for at følge udviklingen i den *interne* fagopfattelse af matematik.

4.2 Den interne fagopfattelse bag 60'er-matematikken

Forsøget på i løbet af 30'erne at finde en fornuftig realisering af den igangværende anvendelsesdiskussion i den sekundære matematikundervisning var ikke et isoleret dansk fænomen. Reaktionen var derfor også international, da man i årene efter Anden Verdenskrig havde fået erfaring med konsekvenserne af de gennemførte ændringer af den sekundære matematikundervisning. Der var over en bred front stigende bekymring blandt de matematikkyndige personer der forsøgte at vurdere resultatet af matematikundervisningen: Den mere direkte orientering af undervisningen mod matematik betragtet som et system af redskaber for praksis (jf. fodnoten på side 28) virkede simpelthen ikke fremmende i forhold til de opstillede mål, men medførte større grad af udenadslære og ringe begrebsforståelse. At vende denne udvikling og skabe grobund for en bedre matematisk *forståelse*, var derfor en central intern bevæggrund for de reformer af matematikundervisningen der blev sat i værk i tiden efter Anden Verdenskrig (Niss; 1996, p. 30f).

Denne forståelsesfokuserede motivation for at ville reformere matematikundervisningen blev kraftigt næret af et samtidigt bud på en nytænkning af det filosofiske grundlag for grundvidenskabsfaget matematik, som blev viet stor opmærksomhed i matematikerkredse – den såkaldte *strukturalisme*. I det følgende vil jeg lave en matematikfilosofisk afstikker og forsøge at indkredse de centrale karakteristika ved denne nytænkning, inden jeg i afsnit 4.2.2 vender mig mod hvordan disse karakteristika satte sig spor i 60'er-matematikkens udformning.

4.2.1 Det strukturalistiske matematiksyn

Strukturalismen som matematikfilosofisk program blev formuleret på baggrund af en kraftig rystelse i matematikkens verden i første del af det 20. århundrede.

Grundlagskrise i matematikkens verden

I århundreder havde matematikken været baseret på den grundopfattelse, at ved at starte med selvindlysende sandheder – fx Euklids fem plangeometriske aksiomer og fem postulater (se fx Eibe; 1897) – og gå videre gennem stringente beviser endes op med sikker, objektiv og eviggyldig viden om universets indretning.

Det implicitte grundlag for etableringen af de selvindlysende sandheder som den videre teoribygning hvilede på, var geometrisk intuition. Med

Georg Cantors (1845-1918) mængdeteoretiske fundering af de reelle tal sidst i det 19. århundrede som den mindst mulige talmængde der udgør et kontinuum – en uendelig talmængde uden "huller" (se fx Moschovakis; 1994, kap. 2 og A) – var grundlaget skabt for en erkendelse af, at en sådan intuition ikke er brugbar som fælles grundlag for hele matematikkens opbygning. Den matematiske analyse fremkom med et utal af kontra-intuitive resultater, hvis sandhed var en logisk konsekvens af Cantors pionerarbejde. Eksempelvis kunne man fremvise funktionsgrafer med de reelle tal som definitionsmængde, der var ingensteds kontinuerte, fx

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{hvis } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Intuitionisme

Der har grundlæggende været to forskellige reaktioner på det tydeligt oplevede behov for en ny fundering af matematik som grundvidenskabsfag, som resultater som dette medførte. Den ene repræsenteres mest markant ved *intuitionismen*, der forbindes med L.E.J. Brouwer (1881-1966) og Arend Heyting (1898-1980).

Ifølge intuitionismens program er matematik ren tankevirksomhed hvis begreber er mentale konstruktioner, og hvis almene gyldighed kan og skal henføres til den fælles-menneskelige intuition (se fx Heyting; 1983/1964). Forsøgene på at vise det umulige i at fundere matematikken på selvindlysende sandheder baseret på intuition er således ifølge intuitionismen ikke udtryk for et filosofisk "syndefald", men for "syge" ikke-matematiske forestillinger der ikke i praksis kan konstrueres, fordi de hviler på et begreb – uendelighed – uden for menneskelig rækkevidde.

Formalisme

Den anden reaktion på de matematikfilosofiske rystelser var at sadle om og forsøge at nytænke hele det fundament, matematiske påstande hviler på. Grundtanken var at opfatte matematikken som en *formalisme*.[11] Udgangspunktet her var accept af, at det euklidiske program med dets betoning af at deducere ud selvindlysende sandheder havde spillet fallit. Opfattelsen var, at påvisningen af tilfælde hvor matematikken fremviste resultater i direkte modstrid med almindelig sund fornuft, gjorde at geometrisk intuition som det implicitte fundament måtte opgives, hvilket også var et farvel til det ontologiske grundsyn at matematikkens genstandsfelt hviler på intuitivt sande forestillinger om verdens indretning. I stedet vendte man sig mod *aritmetikken* og Cantors mængdelære som fundament.

[11] Se fx Neumann (1983/1964), Skovsmose (1990c, pp. 39ff) og Davis & Hersh (1981, pp. 330ff).

Den enkeltperson der mest forbindes med et sådant formalistisk forsvar af matematikken, er David Hilbert (1862-1943). I hans version af formalismen som matematikfilosofisk program bestod det afgørende brud med tidligere tiders matematik i at fjerne det semantiske indhold af matematikkens fundament; aksiomerne. Det eneste der foretages, er navngivning. De genstande der indgår i teorien, skal ikke præciseres eller tillægges nogen mening udover den der fremgår af aksiomerne angående relationerne mellem genstandene. Og aksiomerne skal alene angive relationer, aldrig forsøge at definere genstandenes "væsen" (Skovsmose; 1990c, p. 40ff). Ved at definere et formelt sprog der kan udtale sig om matematiske påstande, kan hele den matematiske struktur nu gøres til genstand for en "meta-matematisk" analyse med hensyn til *konsistens, entydighed* og *fuldstændighed*, der ved endelige kæder af argumenter beviser, at en modstrid ikke kan opstå (Davis & Hersh; 1981, p. 336).

Det meta-matematiske projekt lykkedes ikke for Hilbert, og med Kurt Gödels (1906-1978) ufuldstændighedsteoremer[12] fra 1931 blev det bevist, at der var tale om et umuligt projekt. Det gav dog ikke anledning til at opgive det formalistiske program som helhed. Som *metode* havde formalismen stadig et potentiale i forhold til afklaring af de *epistemologiske* grundspørgsmål om, hvad der karakteriserer matematisk sandhed og erkendelse. En matematisk sandhed giver ifølge formalismen kun mening, hvis en påstand kan vurderes i forhold til et formelt system – formaliseringen er en nødvendig forudsætning for filosofisk afklaring. I mængdelærens sprog kunne matematikken formaliseres aksiomatisk deduktivt. Når aksiomerne fritages for ontologisk indhold – og blot bliver byggesten hvorpå videre teoribygning sker ved at teoremer deduceres fra aksiomerne i henhold til den sproglige syntaks – har beviset for et teorem kun sandhedsværdi relativt til systemet. Prisen er, som flere hævder, at formalismen gør matematikken til et (meningsløst) sprogspil, der ikke "handler om noget".

Strukturalisme

Strukturalismen, der først og fremmest tegnes af en gruppe franske matematikere under pseudonymet Nicolas Bourbaki[13], lod sig inspirere kraftigt af formalismens aksiomatisk deduktive fremstillingsform, men havde en anden dagsorden: Bourbaki havde analyseret et bredt spektrum af matematiske teorier, og fundet at visse relationer mellem de matematiske objekter går igen. Det centrale for Bourbaki var således *strukturerne*, ikke

[12] Kort omtalt i Skovsmose (1990c, p. 44), som også rummer yderligere litteraturhenvisninger.
[13] Se evt. Bourbaki (1950); Dieudonné (1970); Halmos (1957).

objekterne.

I kort form kan karakteristikken af formalismen og strukturalismen og det der skiller dem samles i følgende tre hovedområder:

Ontologi: Som en reaktion mod "syndefaldet" skal matematikken løses fra ethvert intuitivt grundlag. Den skal – i modsætning til Euklidisk geometri – hvile på aksiomer der er indholdsløse. Matematik handler dermed om strukturer, den har ikke selv noget indhold. Formlerne opfattes i fysisk forstand som tegn på papir, og har altså *kun* syntaktisk indhold.

Epistemologi: Den aksiomatisk deduktive teoriudvikling startende fra indholdsløse aksiomer gør matematikken til en leg med symboler. "Spillereglerne" er givet i logikken og mængdelærens sprog. Om et teorem er sandt eller falsk kan kun afgøres i forhold til et sådant aksiomatisk system bestående af aksiomer og "spilleregler" for deduktion herfra. I sig selv er sætninger ren syntaks.

Hvad ville strukturalisterne: Formalismen i Hilberts udgave var blot et middel til at nå meta-matematikkens mål; at påvise konsistens og entydighed. I den strukturalistiske udgave af formalismen havde spørgsmål som disse ikke nogen afgørende betydning. Fordringen for matematisk arbejde skal bestå i at *præsentere* de grundlæggende strukturer som alle de matematiske teorier menes at bestå af.

4.2.2 Den konkrete realisering

Den strukturalistiske opfattelse af matematik som grundvidenskabsfag kom som tidligere nævnt til at spille en væsentlig rolle i de reformer af matematikundervisningen som blev iværksat i Vesteuropa i første halvdel af 1960'erne. I foreningen af den strukturalistiske reformbestræbelse med matematik i fokus og den uddannelsespolitiske reformbestræbelse med matematikundervisning i fokus var det ikke mindst et seminar afholdt i 1959, som kom til at fungere som "Kirsten Giftekniv".

Royaumont-seminaret

Seminaret, som blev afholdt på og senere har fået navn efter det franske slot Royaumont, var arrangeret af OEEC med det formål at bringe den nyeste tænkning indenfor matematikken i anvendelse i det moderne samfund (jf. Høyrup; 1979, p. 50f). Til at klare den sag blev der ifølge forordet i den efterfølgende rapport (OECD; 1961) fra hvert medlemsland inviteret en fremragende matematiker, en matematikundervisningsperson (mathematics educator) eller en ministeriel person og en fremragende matematiklærer. Fra Danmark passede disse adjektiver tilsyneladende på den daværende gymnasiale fagkonsulent i matematik, Ole Rindung, der udover professor Svend Bundgaard som gæstetaler var eneste dansker til stede.

Helt i overensstemmelse med datidens overbevisning om matematikundervisningens nødvendighed var det langt overvejende matematikundervisningens form og indhold frem for dens begrundelse der var til diskussion på seminaret, men i et indledningsforedrag til konferencen adresserer formanden, Marshall H. Stone, direkte OEEC's ikke-interne formål med at arrangere seminaret:

> "There are two major factors which require us to examine with fresh eyes the mathematics we propose to teach to young people in the secondary schools and in the first years at university. One is the extraordinary growth of pure mathematics in modern times. The other is the increasing dependence of scientific thought upon mathematical methods, coinciding in time with a more and more urgent social demand for the services of scientists of every description" (OECD; 1961, p. 15).

Hvad angår den anden faktor giver Stone under overskriften "Need for Modern Spirit" tydeligt udtryk for, at det er den økonomisk-tekniske begrundelse for en nytte-orienteret matematikundervisning der tænkes på:

> "In this period of history it is the rise of modern science and the ensuing creation of a technological society which compels us to give increasing weight to the utilitarian argument for the more intensive teaching of mathematics. In fact, it is no longer possible to treat adequately the place of mathematics in our schools without going into its relations with modern science and technology. [...] Thus the teaching of mathematics is coming to be more and more clearly recognized as the true foundation of the technological society which it is the destiny of our times to create. We are litterally compelled by this destiny to reform our mathematical instruction so as to adapt and strengthen it for its utilitarian role of carrying the ever heavier burden of the scientific and technological superstructure which rests upon it" (Ibid., pp. 17-18).

Som omstændighederne omkring seminaret fremstilles i Høyrup (1979) – og som det iøvrigt fremgår af præsentationen af seminaret i selve rapporten (OECD; 1961) – tog matematikernes interne synspunkter herefter over, og de eksternt rettede begrundelsesdiskussioner blev sekundære i forhold til arbejdet med den matematisk organiserede læseplansændring. Denne prioritering var helt bevidst:

> "The nature of mathematics – and the designing types of mathematics that are important – are rightfully the decisions of mathematicians. What portion of this mathematics can be taught below university level, to whom it can be taught, and the way it can be taught are then the decisions of educators, teachers and writers of textbooks." OECD (1961, p. 61).

I Stones foredrag slås den problemstilling fast, der at dømme efter den efterfølgende rapport kom til at præge konferencen: De nye strukturalistiske strømninger i universitetsundervisningen giver overgangsproblemer mellem gymnasier og universiteter, og introduktionen af den moderne matematik "af passende slags" i gymnasiet kan derfor ikke udsættes (Ibid., p. 16).

Ræsonnementet udfoldes i et centralt foredrag af Jean Dieudonné, der var medlem af og regnes for en særdeles eksemplarisk repræsentant for Bourbaki-gruppen, og var den der mest direkte forsøgte at uddrage didaktiske konsekvenser af gruppens adidaktiske arbejde. På universiteterne er matematikken præget af en ny tænkemåde. En hastigt voksende stofmængde skal håndteres ved at skabe større sammenhæng og præcision i fremstillingen, og til det formål er mere abstrakte teorier som topologi og mængdealgebra nødvendige. Det ser ud til at være den eneste måde at holde rede på den evigt voksende viden der til stadighed tilføjes den eksisterende. Men et sådant projekt tager tid, da abstrakte teoribygninger simpelthen er svære at forstå, og det skaber et pres på universiteternes første semestre. Da længden af universitetsstudierne dårligt kan være længere, er det naturligt at vende sig mod gymnasiet. Her er en række ting rent tidsspilde, hvilket er uhensigtsmæssigt, når universiteterne er underlagt tidspres. Ergo må læseplanen i gymnasiet reorganiseres. I det 19. århundrede blev overgangen fra klassisk geometri til algebra og analyse ifølge Dieudonné oplevet som et hop ind i en ny verden, og sådan oplever de nystartede studerende åbenbart også den introducerende universitetsundervisning. Derfor skal de nye begreber og det nye sprog der er introduceret indenfor de seneste 50 år, indføres i gymnasiet på bekostning af klassisk geometri – "Euklid must go" (Ibid., p. 35).

I rapporten (Ibid., p. 31) introduceres Dieudonnés tilgang som ekstrem, men i det konkluderende kapitel gengives de overordnede krav om intensivering af gymnasiets matematikundervisning nærmest uændret i forhold til hans indlæg: Løsning af universitetets studieforudsætninger, indførelse af matematikkens nye program, hvor forskellen på algebra og geometri langsomt forsvinder (strukturalismen), klassisk geometri skal gennemgås i grundskolen, i gymnasiet skal Euklidisk geometri erstattes af et pensum, hvor deduktiv geometri behandles ved brug af vektorer eller reelle tal, og senere sammenføjes med algebra gennem studiet af matricer, determinanter, grafer, komplekse tal og polære koordinater. Trigonometri skal ud som selvstændig disciplin, og kun inddrages hvor det falder naturligt i forbindelse med det øvrige arbejde (Ibid., p. 107).

Anvendelser af matematik er på dagsordenen flere steder i rapporten, både i form af selvstændige foredrag herom og som noget der kommenteres af både Dieudonné og andre i indlæg med et andet fokus. Det gælder også det konkluderende kapitel hvor det bliver slået fast, at selv om seminarets fokus var på de universitetsegnede studerende, var der i bestræbelserne inkluderet en reform af matematikundervisningen i henhold til de daværende behov i samfundet. Undervisningen i gymnasiet rettes ikke direkte mod at producere fremtidige matematikere – det er brug og anvendelse af matematik i samfundets mange facetter der er de principielle faktorer i "den ny matematik" (Ibid.).

I lyset af at den eksterne nyttiggørelse af matematik som undervisningsfag jo var det Royaumont-seminaret egentlig skulle handle om, er det ikke i sig selv bemærkelsesværdigt. Det er det derimod, at diskussionerne og indlæggene gennemgående kun drejer sig om, *hvordan* strukturalistisk matematikundervisning kan og bør gennemføres, og således implicit forudsætter, at svaret på det bagvedliggende spørgsmål – er en reformering af matematikundervisningen efter de bærende strukturelle egenskaber den bedste måde at indfri målet om matematikkundskaber der "kan bruges til noget"? – er så oplagt ja, at det ikke behøver nævnes, endsige diskuteres.

Indførelsen af den ny matematik i Danmark

Danmark var et af de lande hvor tankerne på Royaumont-seminaret mest gennemført blev omsat til konkret undervisningspraksis.

På det gymnasiale niveau skyldes det – jf. Dansk Matematisk Forening (1981, p. 201), Meyer (1979, p. 103) og Skovsmose (1980, p. 37) – ikke mindst, at der – helt i tråd med en af de centrale implementationsmæssige anbefalinger fra Royaumont-seminaret (OECD; 1961, kap. 4) – blev skrevet et sæt lærebøger som på en meget tydelig og konsekvent måde afspejlede retningslinjerne i Den røde Betænkning (Undervisningsministeriet; 1960) med begreber som mængde, afbildning, relation og komposition som byggesten for den stofmæssige disponering. Bøgerne – Kristensen & Rindung (1962-64) – kunne derfor bruges som en anvisning på, hvordan man som lærer kunne håndtere de mange nye begreber og ideer som den ny matematik rummede, og blev da også omdrejningspunktet for tilrettelæggelsen af de mange efteruddannelseskurser som blev holdt for gymnasiets matematiklærere. I en tid præget af betydelig – og forståelig – usikkerhed over for den radikale nytænkning af matematikundervisningen er det derfor ikke overraskende, at bøgerne indtil midten af 70'erne blev anvendt af ca. 90% af klasserne på matematisk linje i gymnasiet (Meyer; 1979, p. 103).

Den effektive "nedsivning" fra tankerne på Royaumont-seminaret via bekendtgørelser og lærebøger til matematikundervisningspraksis kan for det danske gymnasiums vedkommende forklares med personsammenfald. De to forfattere til lærebogssystemet, Erik Kristensen og Ole Rindung, var – udover at være erfarne og respekterede gymnasielærere i matematik – to af de danske medlemmer[14] i den "Nordiske Kommittén för Modernisering av Matematikundervisningen" som kom til at fungere som igangsætter og inspirator for matematikreformerne i de nordiske lande (Skovsmose; 1980, p. 35ff), og som hvad de danske medlemmer angår stod for den fagspecifikke omtale af matematik i Den røde Betænkning (Undervisningsministeriet; 1960, p. 45-47 og 88ff). Og Ole Rindung var som tidligere nævnt den eneste danske deltager på Royaumont-seminaret.

4.3 Afrunding

4.3.1 Samfundets udviklingstræk

Efter Anden Verdenskrig kom de vestlige lande i kraftig økonomisk medvind. I Danmark gav efterkrigstiden samtidig anledning til, at samfundets fremtidige indretning blev diskuteret. I perioden kan der i høj grad tales om et teknologioptimistisk syn. For at følge med de øvrige vesteuropæiske landes økonomiske udvikling var der behov for omfattende teknologiske investeringer i både landbrug og industri. Der var bred politisk konsensus om at bidrage til denne udvikling, men det er et iøjnefaldende træk at den især blev socialdemokratisk politik. Ideen var at de øgede statslige indtægter af et teknologisk moderne og konkurrencedygtigt erhvervsliv kunne skabe det økonomiske grundlag for en lang række tiltag, der skulle forbedre livsvilkårene for den enkelte borger.

4.3.2 Den eksterne fagopfattelse

Med under 10% af hver ungdomsårgang i gymnasiet og langt færre videregående uddannelsesinstitutioner end i dag var der ét væsentligt problem: Manglen på teknisk kvalificeret arbejdskraft på alle niveauer. Rapporten fra Teknikerkommissionen (jf. omtalen på side 43) efterspurgte en betydelig styrkelse af gymnasiekapaciteten, idet det dels bemærkes at de gymnasiale uddannelser er forudsætningen for uddannelse af de højst uddannede teknikere, dels at det ikke er manglen på "begavede unge mennesker" der hindrer forøgelsen af tilgangen, men en kvantitativ og kvalitativ udbygning af skolesystemet (Statsministeriet; 1959, p. 24ff).

De ulemper der kan være ved, at en stor andel af befolkningen er uddannet indenfor det naturvidenskabelige område og risikerer at se omverdenen ud fra snævert faglige synspunkter, skal imødegås gennem undervisningen indenfor de øvrige fag, primært de humanistiske og samfundsvidenskabe-

[14] De to øvrige danskere var Agnete Bundgaard (Svend Bundgaards søster) og Bent Christiansen.

lige.

Billedet tegner sig ret klart: I forhold til de tre grundlæggende årsager til matematikundervisning skitseret på side 31f er *den økonomisk/tekniske årsag* tydeligt opprioriteret i den eksterne fagopfattelse af matematik.

4.3.3 Den interne fagopfattelse

Matematikundervisningen i gymnasiet skulle bringes i overensstemmelse med det moderne syn på matematik som grundvidenskabsfag der var fremkommet de foregående 50 år, og som indtil starten af 60'erne kun forefandtes i forskningsmiljøerne på universiteterne. Set udelukkende fra et studieforberende synspunkt var 60'er-reformens to vigtigste formål dels at mindske det kulturchok de førsteårsstuderende blev udsat for ved studiestarten, dels at give studenterne en matematikundervisning der var tidssvarende, dvs en undervisning der gav et billede af matematikken, som den opfattes i henhold til *det strukturalistiske program.*

De skitserede synspunkter hører ind under *den politisk/kulturelle årsag*, og som tidligere skitseret var det sådanne synspunkter der reelt lå bag matematikundervisningens praksis.

4.3.4 Fagopfattelsen af matematik som undervisningsfag

Det står klart at fagopfattelsen af matematik som undervisningsfag er spændt ud mellem den økonomisk/tekniske og den politisk/kulturelle årsag. I bekendtgørelsen (Undervisningsministeriet; 1960) er det helt dominerende den sidstnævnte der kommer til udtryk. At denne disharmoni ikke stod mere klart i 1960'erne skyldes givetvis tre forhold.

For det første var den økonomisk/tekniske årsag til matematikundervisningens udformning ikke direkte forbundet med gymnasieundervisningen. Her skulle grundlaget lægges til videre studier der meget mere direkte honorerede den økonomisk/tekniske årsag. Dette syn er fx fremherskende i rapporten fra Teknikerkommissionen (Statsministeriet; 1959).

For det andet var det en udbredt opfattelse at matematikundervisningen havde formaldannende egenskaber i retning af "at vække deres [elevernes] sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform, [og] at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet ... " (Undervisningsministeriet; 1960, p. 58). Personlige egenskaber af denne karakter må anses for særdeles essentielle for en videre uddannelse med vægt på stringens og bevisførelse, hvorfor sådanne formål legitimerer en strukturalistisk præget matematikuddannelse.

For det tredje var den sidstnævnte målsspecifikation – "at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder" (Ibid., jf. omtalen på side 48) – ret direkte udtryk for den økonomisk/tekniske årsag. Formuleringen er imidlertid temmelig ukonkret og blev som beskrevet på side 48f i realiteten ikke tillagt ret stor vægt, hverken i lærebøger eller eksamensopgaver.

Selv om man således godt kan *forstå* hvordan det økonomisk/tekniske og det politisk/kulturelle begrundelsesperspektiv på matematik som undervisningsfag kan eksistere samtidig, er det imidlertid et faktum at undervisningens *realitet* var domineret af den politisk/kulturelle årsag.

Den individorienterede årsag er i et vist omfang repræsenteret i den ovennævnte anvendelsesorienterede målsspecifikation, men må overordnet betragtet siges at være fraværende i både den eksterne og interne fagopfattelse.

4.4 Matematikundervisningen frem til 2005

Indførelsen af 60'er-matematikken i hele uddannelsessystemet er efter min opfattelse den sidste reform som for alvor har ændret på matematikundervisningens konstituerende elementer, med én – måske to – undtagelser. Den ene undtagelse er grundskoleområdet, som i 1995 fik en ny og grundlæggende anderledes matematikbekendtgørelse, som ikke hvad de store linjer angår er blevet ændret siden.

"Måske-undtagelsen" er gymnasieområdet, som med virkning fra sommeren 2005 har fået nye bekendtgørelser. Mange vil nok mene, at matematikundervisningens konstitution hermed også på gymnasieområdet er blevet reformeret på temmelig radikal vis, men det mener jeg godt man på afgørende punkter kan stille spørgsmålstegn ved – derfor "måske'et". Det er i øvrigt ikke en diskussion jeg vil gå nærmere ind i, da jeg i denne afhandling har afgrænset mig fra at analysere gymnasiereformen fra 2005, fordi både den gennemførte forsøgsundervisning og størstedelen af analysen har fundet sted før der var nogen ny reform at forholde sig til.

De matematikfilosofiske diskussioner der har været siden 60'er-matematikkens indførelse, har altså efter min vurdering ikke indvirket nævneværdigt på matematikundervisningen frem til 2005, grundskolen undtaget, og samfundets udvikling er i forhold til de omstruktureringer der blev planlagt efter Anden Verdenskrig, i det store og hele fortsat ad de skinner der lagdes i 1950'erne. På den baggrund kunne man godt forestille sig, at det med de strukturalistiske reformer allerede i 60'erne var lykkedes at finde en indretning af matematikundervisningen som på en og samme tid imødekommer et moderne samfunds forventninger hertil og er i overensstemmelse med fagets identitet som det opleves af dets professionelle udøvere.

At 60'er-matematikken ikke var udtryk for en sådan fremtidssikret "stabil ligevægt" er de fleste der har en mening om sagen, vist enige om. Resten af dette kapitel handler dels om de former for kritik som 60'er-matematikken afstedkom, og som har medført dens afskaffelse som officiel doktrin for den præ-universitære matematikundervisning, dels om hvilke krav vedligeholdelsen og videreudviklingen af velfærdsstaten mere eller mindre eksplicit stiller til matematikundervisningens indretning, og hvordan det på forskellig vis har manifesteret sig i den interne og – ikke mindst – den eksterne opfattelse af matematik som undervisningsfag.

4.4.1 Afslutningen af 60'er-matematikken

Som matematiker kan man ikke undgå at blive fascineret af Bourbaki-gruppens projekt. Aldrig før har faget konstitueret sig selv på så eksplicit og gennemgribende en måde. Men det ledsagende undervisningsprojekt lykkedes ikke: Det blev efterhånden klart at studiet af de abstrakte og generelle begreber og strukturer blev til *mål i sig selv* i stedet for – som tiltænkt – at være midler til højere mål.

Erkendelsen af dette forhold kom ikke samtidigt i de forskellige vestlige lande der havde 60'er-matematikken på programmet. Det var afhængigt af i hvor "ren" en form reformen blev gennemført, hvilket igen hang sammen med hvor tidligt efter Royaumont-seminaret, ideen adapteredes (Niss; 1987, p. 490).

Fokuseringen på studiet af de abstrakte strukturer havde i den elementære matematikundervisning ført til, at eleverne ikke længere kunne regne. Ikke mindst i USA og Sverige medførte det modreaktionen "back to basics", hvor de tidligere forsømte regnefærdigheder blev det essentielle. Allerede i starten af 1980'erne var denne bevægelse dog ved at ebbe ud. Værre var det at eleverne ikke kunne bringe matematikken i anvendelse, at matematikken opfattedes som et lukket spil frakoblet virkeligheden (Ibid.).

Uddannelseseksplosionen som en medvirkende årsag

Helt centralt i forståelsen af problemstillingens *omfang* er de sociologiske faktorer, herunder uddannelseseksplosionen: Sammenfaldende med indførelsen af 60'er-matematikken var der en kraftig stigning i andelen af befolkningen der tog en gymnasial uddannelse; fra 10% i 1960 til 32% i 1976 (Undervisningsministeriet; 1978b, p. 106). Flere og flere blev matematiske studenter uden at have fremtidige matematiktunge studier som sigte.

Dermed var matematikundervisningen i gymnasiet for flere og flere den sidst modtagne undervisning i matematik, og "belønningen" for anstregelserne i form af at opleve matematikken som et kraftfuldt "værktøj" kunne derfor ikke længere udskydes til fremtidige studier. Sammenholdt med en ændret holdning i form af mindre autoritetstro og søgen efter mening og relevans med studierne, var dette forhold med til at spille den ny matematik fallit.

Tidlige bekendtgørelsesrevisioner

Allerede i løbet af 60'erne blev det klart, at der måtte justeres i bekendtgørelsen. Der var problemer med at nå pensum, og i 1964 kundgjorde et cirkulære derfor, at en række punkter fra emnelisten udgik.

Da femdagesskoleugen skulle indføres i 1971, benyttede man lejligheden til at udarbejde en ny bekendtgørelse. Det nye bestod primært i en beskæring af pensum i forhold til 1961-bekendtgørelsen; komplekse tal forsvandt og algebraen blev kraftigt beskåret.

Det fagudvalg der blev nedsat til at revidere bekendtgørelsen, havde elevrepræsentation, og ifølge fagkonsulenten fra 1971-1978, Henrik Meyer (1979, p. 104), afspejlede det sig bl.a. i en væsentlig ændring af målformuleringen: Hvor eleverne i henhold til 1961-bekendtgørelsen skulle gøres "fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder", skulle de i henhold til 1971-bekendtgørelsen opnå en "forståelse af og evne til *kritisk* [min fremhævning] at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder". Matematikundervisningens mål kom derved – med 10 års forsinkelse – i større harmoni med de perspektiver i retning af at udvikle interessen for samfundsproblemer og evnen til kritisk og selvstændigt at bedømme problemerne som jeg på side 47 omtalte var generelt gældende for perspektiverne for den gymnasiale undervisning i henhold til 1961-bekendtgørelsen.

4.4.2 Relevanskrise i matematikundervisningen

Den erklærede anvendelsesorientering satte sig efter manges mening (se fx Meyer; 1979, p. 104f) imidlertid på ingen måde spor i den gymnasiale matematikundervisnings praksis. Dette indtryk bekræftes af at de lærebøger der anvendtes i 1970'erne, udelukkende inddrog problemstillinger fra andre fagområder for at *illustrere* anvendelsesmulighederne af den strukturelt ordnede matematik.

Anvendelsesorienteringen virkede altså ikke efter hensigten. Allerede i 1977 giver Mogens Niss en meget rammende generel kritik af den danske matematikundervisning – en kritik der overordnet set rammer 60'er-matematikken:

> "One of the striking points in this instruction is that reality – represented

> by examples – serves to illustrate mathematics. [...] The relevance of mathematics is neither subject to nor expressed in the instruction but is supposed to be established beforehand and outside the instruction itself." (Niss; 1977, p. 305)

I samme øjemed taler han om en *relevanskrise* i matematikundervisningen. Undervisningen i matematik virker uvedkommende, virkelighedsfjern og dermed irrelevant. For grundskoleområdets vedkommende diskuteres denne relevanskrise af Ole Skovsmose (1980). Han taler om, at 60'er-matematikkens undervisningsprojekt med hensyn til fremstillingsform kan karakteriseres som en "*s*trukturel projektion" der

> "[...] betyder, at organisationsprincippet for undervisningsstoffet kun er kendt af de *få*. Når det er overordnede strukturer, der projiceres ind i undervisningssfæren og søges konkretiseret på forskellige niveauer, kommer disse til at danne sammenhængen i undervisningen. Det er en indsigt i disse strukturer, der giver en forståelse af og en forklaring på, hvad der foregår. Det er strukturerne, der skaber mening i undervisningen, og f.eks. ikke de mange små eksempler, der er knyttet til de enkelte delbegreber." (Skovsmose; 1980, p. 39f)

Denne kritik rammer også gymnasieundervisningen, mest udtalt på de naturfaglige og samfundsfaglige grene, hvor man heller ikke kommer tilstrækkeligt langt langs det "strukturelle gelænder" til at man kan danne en fornuftig og relevant mening.

4.4.3 Den nutidige gymnasiematematik tager form

På Landsmødet om matematikken i Danmark i 1981 arrangeret af Dansk Matematisk Forening tegnes generelt det samme billede. Op til landsmødet var der allerede ved årskiftet 1979/80 nedsat fem udvalg med hver deres kommissiorium dækkende såvel matematik som matematikundervisning på alle niveauer. Idéen var at give et helhedsbillede af matematikken i Danmark (Dansk Matematisk Forening; 1981, p. 1).

Udvalg III, som med Mogens Niss som formand beskæftigede sig med gymnasiets matematikundervisning, formulerede fire ønsker til en ændret matematikundervisning som "øger elevernes intuitive forståelse og deres opfattelse af matematik som et fag, der anvendes inden for mange områder" (Ibid., p. 178f). Undervisningen skal efter udvalgets opfattelse (Ibid., p. 179) direkte citeret bibringe eleverne indsigt i

1. matematikkens specielle natur, som bl.a. kommer til udtryk ved den proces, der består i intuitiv forståelse af en sammenhæng, formulering af en sætning og bevis for denne,
2. nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser,

3. nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig, samfundsmæssig betydning,
4. dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, filosofisk, historisk og samfundsmæssig sammenhæng.

Tre år senere, i 1984, kommer en bekendtgørelse der på mange måder blot er en justering af 1971-bekendtgørelsen, fx er målet uændret. I pensumlisten er ækvivalensrelationer fjernet, og et punkt om regnetekniske hjælpemidler er indført – regnestokken er i perioden afløst af lommeregneren. Samtidigt kommer imidlertid også muligheden for at tilrettelægge undervisningen efter den såkaldte forsøgsbekendtgørelse. Den bygger i høj grad på idéerne i rapporten fra det ovennævnte gymnasieudvalg (Dansk Matematisk Forening; 1981), og gøres med visse ændringer til matematikdelen af bekendtgørelsen fra 1987, der – med en tilføjelse i 1997 om muligheden for et to-årigt forløb til A-niveau efter 1.g. som eneste senere ændring på matematisk linje – er identisk med 1999-bekendtgørelsen.

4.4.4 Perspektiver i 1999-bekendtgørelsen

Ifølge denne bekendtgørelse (Undervisningsministeriet; 1999, p. 117) er målet[15] med matematikundervisningen på obligatorisk niveau[16] på matematisk linje direkte citeret

a) at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder

[15] Ordet har her for første gang i de officielle matematikbekendtgørelser erstattet ordet “formål”, jf. omtalen på side 30.

[16] Når jeg vælger at koncentrere mig om det obligatoriske niveau på matematisk linje skyldes det to ting.

For det første gennemgik ca. $^{2}/_{3}$ af eleverne det obligatoriske niveau både i 1. og 2.g., hvorfor det altså er hovedparten af elevernes og matematiklærernes hverdag der indfanges.

For det andet ligger forskellen på de to niveauer ifølge bekendtgørelsen primært i mængden af faglige begreber der forventes behandlet i undervisningen. Omtalen af de nedenfor omtalte aspekter er således næsten identisk, og for målsbeskrivelsens vedkommende er der på højt niveau blot tilføjet et punkt c) til de to punkter på obligatorisk niveau. Dette punkt lyder: “at eleverne udvikler deres evne til selvstændigt at benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved hjælp af matematiske begreber og metoder.” Da denne udbygning af målet med matematikundervisningen fra obligatorisk til højt niveau i gymnasiet må vurderes som en skærpelse af fordringerne i punkt b) ville fortolkningen af meningen med målsbeskrivelsen blot få større berettigelse, hvis jeg valgte at tage udgangspunkt i gymnasiets højeste matematikniveau.

Jeg mener derfor ikke der ligger nogen indsnævring af problemfeltet i at fokusere på det obligatoriske niveau hvad målsbeskrivelsen angår, tværtimod.

b) at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder.

Som traditionen byder ledsages denne målsætning i bekendtgørelsen af en temmelig detaljeret pensumbeskrivelse (med hovedemnerne tal, geometri, funktioner, differentialregning samt statistik og sandsynlighedsregning), men som noget nyt i forhold til bekendtgørelserne forud for reformen i 1987 er udspændingen af undervisningens indhold nu suppleret med en karakteristik af tre såkaldte aspekter (Ibid., p. 118):

a) *Det historiske aspekt*
Eleverne skal opnå kendskab til elementer af matematikkens historie og matematik i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.
b) *Modelaspektet*
Eleverne skal opnå kendskab til opbygning af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger samt blive i stand til i simple situationer selv at gennemføre en modelleringsproces.
c) *Matematikkens indre struktur*
Eleverne skal opnå forståelse af de for matematik karakteristiske tankegange og metoder og indsigt i, hvordan disse indgår i udvikling og strukturering af matematiske emneområder.

For første gang optræder forventningen om at man beskæftiger sig med anvendelser i matematikundervisningen, altså nu andre steder i bekendtgørelsen end i målbeskrivelsen som et af flere ønskede perspektiver på arbejdet med det faglige stof.[17]

4.5 Nutidige perspektiver på matematikundervisning

Såvidt gymnasiets mål og indhold fra den mere "formelle" side fra bekendtgørelsen anno 1961 og frem. På baggrund af denne gennemgang vil jeg nu forsøge at gå bag om intentionerne i 1999-bekendtgørelsen ved fra forskellige vinkler at karakterisere det moderne samfunds krav til og samspil med matematikundervisningen i gymnasiet.

Gymnasiets rolle i samfundet har historisk set balanceret mellem den studieforberedende og den almendannende rolle. Tidligere var sondringen

[17] I Hermann & Hirsberg (1989) diskuter de to daværende fagkonsulenter for matematik i det almene gymnasium baggrunden for indførelsen af aspekterne.

lidt uklar for matematikundervisningens vedkommende, hvor man nærmest antog at almendannelsen ville følge mere eller mindre automatisk i kølvandet på de isolerede faglige (studieforberedende) studier.

I dag er situationen en anden; der er i stigende grad fokus på at få ekspliciteret, hvilket udbytte matematikundervisningen kan give eleverne udover forståelse og beherskelse af matematiske begreber og metoder. Begrundelsesdiskussionerne, der især i didaktiker-kredse siden 70'erne er tiltaget, virker som en sandsynlig forklaring på denne øgede opmærksomhed.

At begrundelsesdiskussionerne er tiltaget kan ses som et symptom på, at samfundet har undergået forandringer af betydning for matematikundervisningen. Det almendannende aspekt af matematikundervisningen indebærer i dag i væsentlig højere grad end tidligere at forstå og kunne forholde sig til væsentlige demokratiske problemstillinger. Den ændrede fortolkning hænger efter min opfattelse sammen med, at de samfundsmæssige ændringer der har fundet sted, primært har indebåret, at *kompleksiteten* af måden samfundslivet er indrettet på er forøget ganske væsentligt siden 1960'erne.

Denne fortolkning vil jeg nu uddybe for herigennem at argumentere for følgende konklusion: Den væsentligste ændring af *fagopfattelsen* af matematik og matematikundervisning fra 1960'erne til i dag kan kort karakteriseres ved, at en væsentlig årsag til at gennemføre matematikundervisning "for de mange" er et ønske blandt mange personer med indflydelse på matematikundervisningens overordnede tilrettelæggelse om at medvirke til at udvikle elevernes *demokratiske kompetence*. I analysen forholder jeg mig kun eksplicit til det gymnasiale niveau, men konklusionen gælder efter min vurdering i mindst lige så høj grad grundskolens matematikundervisning.[18]

[18] Som en indikation lyder det officielt givne mål med undervisningen i grundskolen således:

> "Formålet med undervisningen i matematik er, at eleverne bliver i stand til at forstå og anvende matematik i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold. Analyse og argumentation skal indgå i arbejdet med emner og problemstillinger.
>
> Stk. 2. Undervisningen tilrettelægges, så eleverne opbygger matematisk viden og kunnen ud fra egne forudsætninger. Selvstændigt og i fællesskab skal eleverne erfare, at matematik både er et redskab til problemløsning og et kreativt fag. Undervisningen skal give eleverne mulighed for indlevelse og fremme deres fantasi og nysgerrighed.
>
> Stk. 3. Undervisningen skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle i en kulturel og samfundsmæssig sammenhæng. Med henblik på at kunne tage ansvar og øve indflydelse i et demo-

4.5.1 Uddannelsesområdet under forandring

Opprioriteringen af uddannelsesområdet i 1950'erne som førte til Den Blå og Den Røde Betænkning (jf. side 45f), var kun startskuddet til en lang række uddannelsespolitiske tiltag i den efterfølgende periode. Med skolereformen i 1958 opnåedes der betydeligt større reélle muligheder for, at også elever fra arbejder- og mellemklassehjem kunne komme i gymnasiet. Mellemskolesystemet blev afskaffet og – endnu væsentligere – der blev skabt strukturel lighed mellem landsbyskolerne og byskolerne.

Med skoleloven af 1975 tog man endnu et skridt mod den udelte enhedsskole ved at indføre den overordnede struktur vi kender fra i dag, med 9 års sammenhængende obligatorisk undervisning og et valgfrit 10. klassetrin. På de sidste klassetrin kunne klasserne deles i grundkursus og udvidet kursus i regning og matematik, sprogfag samt fysik og kemi. Herved fik man også større sammenhæng mellem gymnasieskolen og grundskolen. I 1977 afskaffedes realafdelingerne på gymnasieskolerne, hvorefter grundskolen og gymnasieskolen som system var nogenlunde som i dag.

Hvis vi ser på undervisningssektoren som helhed er der i det hele taget siden halvtredserne tale om en massiv udbygning. Perioden fra 1960 til 1976 er nok den periode i nyere tid hvor der er sket mest på uddannelsesområdet med oprettelsen af bl.a. Odense Universitet, Roskilde Universitetscenter, Ålborg Universitetscenter, H. C. Ørsted Instituttet, Københavns Universitets afdeling på Amager, Danmarks Ingeniør Akademi og etableringen af EFG- og hf-uddannelserne (Undervisningsministeriet; 1978a), og så er det som nævnt (jf. side 60f) også i denne periode gymnasiet skifter status fra elite- til masseuddannelsesinstitution.

Samtidig med at adgangen til gymnasiet er blevet lettere som følge af de strukturelle ændringer i grundskolen fra 1958 og frem[19], har en drejning i gymnasiets læseplan formentligt også bidraget til dets søgningsmæssige succes. I perioden før Anden Verdenskrig var pensum vokset så voldsomt, at det ifølge Undervisningsministeriet (1978b, p. 41ff) havde medført en relativt stor afstand mellem gymnasieuddannelsen og samfundets mere erhvervsrettede behov, og det havde bidraget til at gøre studentereksamen frygtet på grund af sit omfang. Stresset med at nå det store pensum medførte generelt mindre eksperimenteren og selvstændig tilrettelæggelse af undervisningen; lærebøgerne, der sammen med eksamensfordringerne hav-

kratisk fællesskab, skal eleverne kunne forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse." (Undervisningsministeriet; 2003, p. 11)

[19] Eksempelvis peges der i Dansk Matematisk Forening (1981, p. 212) på realskolens afskaffelse som har gjort, at gymnasiet nu fremstår som den naturlige fortsættelse af grundskolen for en elev der ønsker en eksamen til brug for en videre uddannelse.

de en stor del af skylden for det store pensum, blev fulgt slavisk. Eleverne der fulgte med, var i stigende grad mindre selvsikre og selvstændige. Efter krigen blev en anmodning fra gymnasieskolernes lærerforening efterkommet, gående på at bibeholde den midlertidige ordning krigen havde givet anledning til, som opererede med et mere realistisk pensumomfang.

En anden bidragende faktor har givetvis været et generelt højere indkomstniveau og deraf følgende økonomisk overskud hos den øvre middelklasse[20]. I Undervisningsministeriet (1978b, p. 73ff) beskrives den sociale baggrund for eleverne i gymnasiet i henholdsvis 1966 og 1971, og det fremgår at andelen af elever fra dette samfundslag er vokset markant i løbet af disse 5 år.

4.5.2 Træk af demokratiets vilkår fra 1950'erne til i dag

Både de strukturelle ændringer i grundskolen og den øgede søgning til gymnasiet kan tages som udtryk for et samfund hvis kompleksitet fordrer et stadig højere alment dannelsesniveau. Det har skabt en situation hvor den enkeltes demokratiske indflydelse både kan siges at være forbedret og forværret, afhængigt af hvilket perspektiv man anskuer sagen fra.

Øgede *muligheder* for demokratisk indflydelse

Demokratiets udvikling i Danmark hviler på idealet om den parlamentariske styringskæde, som kan beskrives som en forsimplet model af det politiske system. I grundloven[21] fastsættes en magtdeling således at den *lovgivende* magt er hos regeringen og Folketinget i forening (den lovgivende forsamling), den *udøvende* magt hos regeringen, og den *dømmende* magt hos domstolene. Grundloven kan dermed opfattes som en ramme for hvordan det politiske system skal fungere, som den parlamentariske styringskæde tager udgangspunkt i.

Embedsværket er *regeringens* apparat til iværksættelse af den politiske vilje. I praksis sikrer *parlamentarismen* at den siddende regering ikke kan handle mod et flertal i Folketinget, men formelt er embedsværket altså regeringens organ. Hvis magtdelingen i grundlovens ånd skal give mening, skal embedsværket være både neutralt og kompetent. I forhold til befolkningen bygger dets autoritet på statsmagtens monopol på brug af tvang med de vedtagne lovgivningsmæssige begrænsninger, der beskytter

[20] Det vil sige socialklasse II: Selvstændige med mellemstore virksomheder og overordnede funktionærer med 10-50 underordnede (i 1968 ca. 10% af befolkningen), og socialklasse III: Selvstændige med mindre virksomheder og funktionærer med ikkerutinepræget arbejde (i 1968 ca. 39% af befolkningen).

[21] Se http://www.folketinget.dk/BAGGRUND/00000033/00232596.htm

befolkningen mod magtmisbrug. Embedsværkets rolle er altså lidt forsimplet udtrykt karakteriseret ved ansvar overfor det parlamentariske flertal i Folketinget og magt overfor befolkningen.

I en sådan let overskuelig repræsentativ demokratimodel består den demokratiske borgerpligt og -ret i at pege på, hvem man foretrækker som sin repræsentant på tinge, og så bruge tiden mellem valgene til at vurdere de folkevalgtes forvaltning af den udstukne magt.

I forhold til dette udgangspunkt er den samfundsmæssige kompleksitet som nævnt øget voldsomt siden etableringen af velfærdsstaten tog fart i 1950'erne, både i det små og i det store. På makroniveau er en lang række områder blevet decentraliseret gennem en flytning fra statsligt til kommunalt niveau, og med medlemskabet af EU er grænserne for hvad folketinget har suverænitet til at beslutte, blevet flyttet.

Det vigtigste for den enkelte borgers mulighed for at opnå demokratisk indflydelse er imidlertid, at vi i stigende grad betjener os af *en korporatistisk samfundsmodel*, hvor de demokratisk valgte magthavere i stat og kommuner gennem forhandling og uddelegering af ansvar samarbejder med forskellige borgergrupper om forvaltningen af magten. Det drejer sig både om de selvbestaltede interesseorganisationer som eksisterer på snart sagt ethvert område fra de mindste patient- og dyrevelfærdsforeninger til de store virksomheds- og lønmodtagerorganisationer, og om institutionaliserede grupper som de offentlige råd og nævn (fx Rådet for Større Færdselssikkerhed og Dansk Sprognævn) og tilsvarende institutioner på det private arbejdsmarked. Lovgivningsmæssigt sker samarbejdet primært via *rammelovgivning*, hvor de principielle rammer fastlægges af Folketinget, og hvor udfyldningen af rammerne er overladt til embedsværket og organisationer i tilknytning til området i fællesskab (Pedersen et al.; 1994).

En sådan pluralistisk beslutningskultur, hvor alle principielt har mulighed for at deltage direkte i det demokratiske arbejde som medlem af en interessegruppe, fremhæves ofte som en af de væsentligste gevinster ved indretningen af de vestlige demokratier (Held; 1996, pp. 208ff). Det skyldes ikke mindst, at det selvsagt virker stabiliserende på samfundsudviklingen, at de parter der formodes at være interesserede i en sag, inddrages i beslutningsprocessen, og dermed får både medindflydelse på og medansvar for den gennemførte politik på området.

Øgede *krav* for at opnå reel demokratisk indflydelse

Den korporatistiske samfundsmodel kræver meget af borgerne, hvis den skal fungere efter hensigten. Så meget at et af de væsentligste kritikpunkter af modellen er, at den i realiteten virker mindst lige så systematisk magtforvridende som det klassiske repræsentative demokrati, hvor dem med stemmeret har magt og dem uden ikke har (Ibid.). Det skyldes det som i en klassisk artikel er blevet benævnt “the two faces of power”:

> “Of course power is exercised when A participates in the making of decisions that affect B. But power is also exercised when A devotes his energies to creating or reinforcing social and political values and institutional practices that limit the scope of the political process to public consideration of only those issues which are comparatively innocuous to A. To the extent that A succeeds in doing this, B is prevented, for all practical purposes, from bringing to the fore any issues that might in their resolution be seriously detrimental to A’s set of preferences.” (Bachrach & Baratz; 1962, p. 948)

I en kritisk analyse af demokratiets tilstand i Danmark analyserer Pedersen et al. (1994) professionaliseringen af de offentlige institutioner, og peger i den forbindelse på økonomstanden som den største “synder” med hensyn til magtudøvelse gennem dagsordendominans. Det forhold at alt gøres til genstand for økonomisk analyse, bliver styrende for den politiske virkelighed:

> “De mægtigste politikere i dagens Danmark er cheføkonomerne: de økonomiske konsulenter og vismænd, rådgivere og sekretærer – i Budgetdepartementet, Det Økonomiske Råd, de store organisationer, de nationale banker, forsikringsselskaber, OECD, Arbejderbevægelsens Erhvervsråd og de andre tænketanke. [...] Det er [...] gennem kampagneøkonomernes allestedsnærværende redegørelser og rapporter, at der skabes sprog om, hvilket samfund det er, vi lever i, hvilke problemer dette samfund står over for og hvilke løsninger det er muligt at anvende. Det er gennem redegørelser og rapporter, gennem det konstante spil om at sætte holdninger og erfaringer på sprog, at sprogspillet har afløst den direkte politiske formulering af problemer, mål og veje.” (Pedersen et al.; 1994, p. 47 og 49)

Risikoen for mere eller mindre målrettet manipulation må modsvares af befolkningens *reelle* mulighed for deltagelse og indsigt. Bogens forfattere, som alle er erfarne beslutningstagere fra enten erhvervslivet eller det etablerede politiske system, antyder en løsning som involverer argumenter for de ikke-politiske institutioners betydning; biblioteker, videnskabelige og kulturelle akademier etc.:

> “For os at se, er paradoksernes paradoks derfor den eneste mulighed: at skabe rum for stadig flere informationer, andre informationskilder, flere måder at tænke på, stedse flere meninger, endnu flere anskuelser. Vi opfordrer til en udvidelse af folkestyret (den offentlige opinion), gennem en styrkelse af alle former for modspil til sprogspillet. Informationens orkan, meningernes turbulens er faktisk den eneste mulighed for at politisere, hvad de professionelle har gjort professionelt. [...] Det hjælper ikke meget, at der findes en formel frihed til at ytre sig, hvis den allerede er besat af offentlighedens scenografer. Og hvad kan det nytte, at alle har frihed til at tale, hvis de intet har at sige, fordi hvad der kan tales om, allerede er bestemt af kulturens teknologer.” (Pedersen et al.; 1994, p. 194f)

4.5.3 Uddannelse til demokrati

Samfundsudviklingen har altså medført, at politisk indflydelse er blevet til betydeligt mere end blot med mellemrum at sætte et kryds til kommunal- og folketingsvalg. Dels er mulighederne for demokratisk indflydelse blevet forøget, dels er det efterhånden erkendt, at den reelle mulighed for indflydelse fordrer at man kan begå sig i forhold til den type udfordringer, som magtstrukturerne i et korporatistisk repræsentativt demokrati implicit skaber. Det er nødvendigt at være i besiddelse af *demokratisk kompetence*, som jeg i første omgang blot vil bruge som betegnelse for det at kunne deltage kritisk konstruktivt i et demokrati.

Næste skridt i analysen består i at forsøge at indkredse nogle elementer i *udviklingen* af en sådan kompetence, og hvilken rolle uddannelsessystemet generelt og matematikundervisningen mere specifikt kan og skal spille i den sammenhæng. Det vil jeg gøre ved at præsentere og sammenstille to initiativer (eller rettere; de rapporter som står tilbage herfra), som med 15 års mellemrum meget eksplicit har haft denne problemstilling på dagsordenen.

Perspektiver på sagen i redegørelsen U90

Det første initiativ er en større redegørelse for uddannelsesområdet frem til 1990, U90, som Ritt Bjerregaard i sin egenskab af undervisningsminister i 1975 iværksatte ved Det centrale Uddannelsesråd (CUR). Det var et bredt sammensat organ med bl.a. ministerielt udpegede personer og et meget bredt udsnit af de faglige organisationer, og repræsenterede derfor et bredt spektrum af politiske holdninger.

Rapporterne (Undervisningsministeriet; 1978a,b), som initiativet resulterede i, skabte politisk debat både internt i CUR resulterende i adskillige mindretalsudtalelser i rapporterne og eksternt i form af kritiske indlæg i medierne og i folketingssalen. Den eksterne kritik kom ikke mindst fra højrefløjen i Folketinget og handlede bl.a. om en lighedsideologi, som ikke mindst Socialdemokratiet havde langt fremme på dagsordenen i 1970'erne, og som i meget kontante vendinger fandt opbakning i rapporterne. Eksempelvis anses det "for meget betydningsfuldt, at det fra politisk side slås fast, at lighedsorientering er en central målsætning, der må respekteres fra første til sidste trin i uddannelsessystemet." (Undervisningsministeriet; 1978a, p. 142).

Andetsteds i samme rapport (Ibid., p. 128) peges på, at 12 års uddannelse for alle er en nødvendig – men langt fra tilstrækkelig – betingelse for at mindske ulighederne i samfundet. Det er en indikation på, at lighedsideologien var en væsentlig del af årsagen til strukturændringerne i grundskolen (bl.a. med indførelsen af ni års obligatorisk skolegang) og opbakningen bag den øgede søgning til gymnasiet i 70'erne.

I U90 er et af perspektiverne på den uddannelsesmæssige satsning som nævnt hvad forfatterne selv kalder "uddannelse til demokrati" (Undervisningsministeriet; 1978a, pp. 97-101 og 22-127). På de sidstnævnte sider diskuteres hvad der i forhold til dette formål bør lægges vægt på i undervisning med et almendannende sigte, og flertallet bag U90 advokerer kort fortalt for hvad man kan betegne som socialdemokratiske synspunkter:

> "Skolen må lægge grundlaget for, at næste generation forstår, *hvordan det politiske system fungerer i nutidens Danmark*, hvordan det fungerede tidligere, og hvorledes det er i andre lande. Og den skal gå et skridt videre og søge at give *en positiv holdning til de grundlæggende principper i vor form for folkestyre*, forstået sådan at unge vil gå aktivt ind for denne form og for at anvende dens muligheder – og udbygge og konsolidere dem. Der er faktisk væsentlige regler og principper, som næsten alle partier er enige om – eller i hvert fald enige om at profitere af – nemlig *retssikkerhed* og *retsbeskyttelse* for individet og de *demokratiske frihedsrettigheder*, som er fastslået i grundloven." (Ibid., p. 122)

Dette grundsynspunkt sammenholdes med først et højreorienteret og derefter et venstreorienteret/marxistisk syn på skolen:

> "Fra én side hævdes, at skolen og lærerne skal holde sig væk fra dette, fordi det er et anliggende for forældre, og der opstår risiko for konflikt mellem skole og forældre, hvis skolen blander sig i de moralsk og politisk betonede holdninger. [. . .] Målet for opdragelsen kan være at gøre det muligt for den enkelte elev selv at tage stilling til væsentlige livsspørgsmål, og hertil hører også, at eleven bliver bekendt med andres standpunkter i en atmosfære, der er præget af gensidig tillid og respekt." (Ibid., p. 123)

> "Heroverfor sættes kravet om, at skolen skal udvikle en *kritisk holdning*, specielt til kapitalismen, til magthaverne osv. eller bredere: en kritisk holdning over for de urimeligheder og uretfærdigheder, der er i samfundet. Den opfattelse, at 'ethvert hjem må kunne sende sit barn i skole med ro i sindet', kan imidlertid let blive en *politisk sovepude*, en vigen uden om samfundsproblemer." (Ibid., p. 124)

Herefter forsøges det indkredset hvad der ligger i, at de unge skal uddannes til selv at kunne tage stilling:

> "Det kan ofte være svært at se forskellen på den foran omtalte opfattelse af det *selvstændigt og kritisk* tænkende unge menneske og den opfattelse, at skolen skal gøre de unge *samfundskritiske i den specielle forstand, at de får en negativ holdning over for det bestående samfund*. Det humanistiske krav om selvstændig stillingtagen er – måske lidt groft sagt – ofte blevet udnyttet som dække for en sådan *indoktrinering* i bestemte retninger, det være sig venstremarxistisk eller yderligtgående højrereaktionær. Her drejer det sig i virkeligheden ikke om en kritisk stillingtagen, men om *en afstandstagen ud fra et andet sæt værdinormer* end det officielt accepterede." (Ibid., p. 125)

Holdningen bagom det citerede er altså nogenlunde følgende: I et demokratisk land skal skolen på en eller anden måde bidrage til at uddanne selvstændige unge mennesker, der kompetent og kritisk skal kunne danne deres egen mening baseret på sunde principper og derfor skal kunne gennemskue forskellige argumenter og propaganda.

Det er jo svært at være uenig i. Den store uenighed består i hvad de "sunde principper" er. Hermed kommer vi ind på meget ideologiske eller normativt prægede områder omkring hvordan statsmagten *bør* organiseres. Ser man rundt om i verden får man sikkert lige så mange bud på mulige måder at gøre dette på som der er lande. Uenigheden, der afsløredes i debatten omkring U90, er således meget sigende for besværlighederne man løber ind i, i forsøget på at karakterisere det samfundsmæssige syn på undervisning som ét syn.

Perspektiver fra "Initiativet vedrørende Matematikundervisning"

Hvordan matematikundervisningen mere specifikt kan og skal bidrage til udviklingen af demokratisk kompetence blev diskuteret på fem konferencer, som i perioden fra 1987 til 1991 blev afholdt af "Initiativet vedrørende Matematikundervisning" under Statens Humanistiske Forskningsråd. Det fælles overordnede tema var det omgivende samfunds krav og forventninger til matematikundervisningen med det demokratiske perspektiv som et af de dominerende, jf. titlerne på de udgivne konferencerapporter[22].

Det meget klare budskab fra disse konferencer set under ét er, at samfundet i stadig større omfang og på stadig flere områder betjener sig af matematik, og at dette bør have undervisningsmæssige konsekvenser: Eleverne skal kunne forholde sig til og selv gøre nytte af anvendelser af matematik i udfordrende ekstra-matematiske situationer, som de mødes i erhvervslivet, i videre studier, i dagligdagen, i det demokratiske liv etc.

Også blandt professionelle brugere af matematik diskuteres det, i hvilket omfang matematikkens anvendelser misbruges, fx som grundlag for beslutningsprocesser. Som et led i at motivere afholdelsen af den første konference bruges fx. følgende eksempel på en matematikbrugers manglende evne til at skelne mellem matematik og dens anvendelse:

> "I en radioudsendelse for nogen tid siden kunne man høre en bonde, en forsker og en radiomand diskutere nitratforureningen ved gødskning. Forskeren havde foretaget et forsøg, hvis resultat bonden drog i tvivl. Forskeren kom da med det afgørende argument: 'Matematikken lyver jo ikke.' Så

[22] Nissen & Bjørneboe (1988, 1989a,b, 1990); Nissen & Blomhøj (1992), som er anbefalelsesværdige for lærere der ønsker perspektiv på og inspiration til undervisningens praksis.

> var både radiomand og bonde klar over, at det sidste ord var sagt i den sag." (Nissen & Bjørneboe; 1988, p. 9).

Eksemplet er illustrativt for alle konferencernes formål set under et. At forstå hvordan matematik indgår i konkret anvendelse udgør et problemfelt, ikke bare med hensyn til hvordan anvendelser af matematik må gøres til genstand for reel undervisning på videregående studier, men også i relation til de muligheder for manipulation overfor den brede befolkning, som anvendelser af matematik indebærer.

Flere af indlæggene på konferencerne konstaterer i forlængelse heraf en demokratisk fare i kombinationen af den stigende anvendelse af matematikken i samfundsrelevante problemer og den manglende indsigt og forståelse af disse forhold i befolkningen.

Ole Skovsmose peger på, at *demokratiargumentet* – den store demokratiske betydning af anvendelser af matematik i nutidens samfund brugt som begrundelse for eksistensen af matematikundervisning – indeholder tre påstande: For det første at den omfattende anvendelse af matematik "foregår under det teknologiske samfunds overflade. Matematikanvendelsen er reel og omfattende, men skjult." (Nissen & Bjørneboe; 1988, p. 72f). For det andet at matematikken gennem sine anvendelser har en samfundsformende funktion. Matematik indgår som en integreret del af samfundets teknologier på en unik måde, og man kan ikke forestille sig en samfundsudvikling der blot minder om den, vi er vidne til, uden den omfattende brug af matematik. For det tredje fremhæver han, at hvis man skal have mulighed for at udøve sine demokratiske pligter og rettigheder, må man være i stand til at identificere og forstå hovedprincipperne i de samfundsformende mekanismer, og herunder hører det at være i stand til at gennemskue matematikanvendelsen (Ibid.).

Igen kan eksemplet fra radioudsendelsen illustrere essensen i budskabet. Matematikundervisningen har en stor demokratisk forpligtelse i nutidens højteknologiske samfund, fordi anvendelser af matematik i meget stor udstrækning ikke er synlig, er kompleks, indgår i flere og flere sammenhænge som beslutningsunderstøttende grundlag og dermed er et potentielt magtredskab.

På konferencerne "Matematikundervisning og demokrati I/II" var dette naturligt i centrum for konferenceindlæggene og diskussionerne. Mogens Niss fastslår i sit oplæg "Matematiske modeller, almendannelse og demokrati" at matematikundervisningens hovedopgave er at sætte alle i stand til at forstå, tage stilling til og handle i og med matematikken, som den til enhver tid manifesterer sig – synligt eller usynligt – i kultur og samfund. Han peger bl.a. på, at især *synliggørelsen* af matematikkens samfundsmæssige betydning udgør en central problemstilling i forhold til denne opgave (Nissen & Bjørneboe; 1990, p. 68).

De tre årsagstyper og aktør-struktur forholdet

De to omtalte initiativer med fokus på uddannelse til demokrati kan perspektiveres ved at se på, hvad de forskellige udmeldinger implicit udtrykker om forholdet mellem individ og statsmagt, og hvordan de afledt heraf kan siges at vægte de refererede samfundsorienterede og de individorienterede årsager til at udbyde matematikundervisning, jf. omtalen på side 31f.

I bogkapitlet hvor Mogens Niss udpeger de tre årsagstyper, peger han også på en sammenhæng mellem bestemte samfundstyper og vægtningen af de tre årsagstyper:

> "Furthermore, societies in which traditions of democratic rule and control are old and strong and not completely subordinated to the forces of the free market economy (e.g. in the Scandinavian countries and the Netherlands) tend to place relatively more emphasis on providing individuals with prerequisites for competent, active, concerned and critical citizenship. In contrast, societies with mainfest authoritarian traditions (readers are invited to think of their own favourite examples) tend to disregard or discard – or even actively combat – the empowerment of the population at large for democratic citizenship, also as far as mathematical competence is concerned." (Niss; 1996, p. 24)

For Danmarks vedkommende bekræfter denne fremstilling mit indtryk af situationen som den har set ud de seneste 20-30 år. Opprioriteringen af den individorienterede årsag fik især vægt i tilknytning til *relevanskrisen* i matematikundervisningen omkring slutningen af 70'erne.

I rapporten fra Landsmødet om matematikken i Danmark i 1981 skitserer udvalget om gymnasieundervisningen hvad de ser som relevansdiskussionernes to centrale problemstillinger. Det første er kløften mellem en "intuitiv, heuristisk, omverdensorienteret matematikbeskæftigelse" og en studieforberedende strukturel matematik (Dansk Matematisk Forening; 1981, p. 214). "Det andet problem er, hvordan en hensyntagen til elevflertallets private og samfundsmæssige liv skal afvejes med en hensyntagen til samfundets behov for specialiseret (og fåtallig) arbejdskraft på højt og måske snævert fagligt niveau" (Ibid.).

I forhold til de tre essentielle årsagstyper er det den økonomisk/tekniske og den individorienterede årsag, der her holdes op mod hinanden. Modstillingen af disse to værdisæt for samfundsudviklingen modsvares af to fundamentalt forskellige perspektiver på samfundets konstitution, hvor tingene anskues fra henholdsvis *aktør- og strukturniveau.* Denne analytiske modstilling hører til sociologiens helt centrale omdrejningspunkt, og betegnes der ofte som "aktør-struktur forholdet": Er det således samfundet der former individerne (således at individernes adfærd er afhængigt af det givne samfund), eller er det individerne der skaber samfundet (således at samfundet skabes af summen af individernes handlinger som de foretager af egen fri vilje)?[23]

Med disse termer er "uddannelse til demokrati" i U90 set fra struktursiden; "samfundet skaber individerne", og af de to samfundsorienterede årsagstyper er det den politisk/kulturelle der synes at dominere. Kritikbegrebet tager udgangspunkt i opretholdelse af det nuværende demokratiske samfund, og sætter fokus på den enkelte borgers mulighed for at indgå aktivt i udbygningen og konsolideringen af det.

De egenskaber der efterspørges i Pedersen et al. (1994) og i rapporterne fra Initiativet vedrørende Matematikundervisning er af en anden karakter: De er individorienterede i og med at udgangspunktet er, at det enkelte individ både for sin egen og for samfundets skyld skal udvikle sig på en måde, der gør vedkommende i stand til og interesseret i at sætte kompetente spørgsmålstegn ved både synlige og ikke-synlige demokratiske skævvridninger.

4.5.4 Matematikundervisning og uddannelse til demokrati

"Hvordan kan matematikundervisningen bidrage til at udvikle de egenskaber, den lille dreng i 'Kejserens nye Klæder' lagde for dagen?", spurgte planlægningsgruppen bag den første konference under Initiativet vedrørende Matematikundervisning (Nissen & Bjørneboe; 1988, p. 15).

Det er en kort og præcis måde at udtrykke essensen i "uddannelse til demokrati": Den enkelte elev skal på en eller anden måde gennem uddannelsen udvikle en række *kompetencer*, som er nødvendige men ikke tilstrækkelige for at sikre en *modig* og *kritisk* attitude som bidrager til at modvirke "medløberi". Det spørgsmål der rejses er så hvordan matematikundervisningen kan og skal bidrage til dette projekt.

[23] De klassiske sociologer har indtaget standpunkter på begge sider af dette forhold (jf. Andersen & Kaspersen; 1996), hvilket antyder at der ikke er ét rigtigt svar på spørgsmålene.

Blandt de mest kendte på den strukturelle side, dvs. indenfor den teoriretning man overordnet kalder funktionalisme, er Herbert Spencer (1820-1903) og Emilie Durkheim (1858-1917). I funktionalismen udgør helheden mere end summen af individernes adfærd.

Blandt de klassiske sociologer der fokuserer på aktøren, er Max Weber (1864-1920). Weber er interessant af flere årsager: For det første kan hans begreber i vidt omfang siges at ligge bag organiseringen af embedsværket som statsmagtens forlængede arm i forhold til befolkningen og som rådgivende organ. For det andet er en række af de nutidige sociologiske tænkemåder inspireret af hans arbejder.

Individorienteret "Mündigkeit" som sagens kerne

Den daværende undervisningsminister, Bertel Haarder, kredsede om denne problemstilling i en tale i 1983 ved årsmødet for sammenslutningen af de gymnasiale lærerforeninger for matematik, fysik og kemi (LMFK):

> "Det er min opfattelse (og jeg håber, at jeg har ret i den), at gymnasiets matematik-, fysik-, og kemiuddannelse er almendannende i netop den forstand, at den udruster eleverne med værktøj til at beskrive og erkende komplicerede fænomener. Det enkelte menneske i et højt udviklet industrisamfund som det danske skal som et led i sin personlige udrustning have en mulighed for en kvalificeret indsigt i og stillingtagen til de mange beslutninger, der træffes med baggrund fx i eksperters anvendelse af matematiske modeller. Det gælder spørgsmål om teknik, teknologi, økonomi, folkesundhed osv. Hvis den enkelte skal have mulighed for andre holdninger end 'dyb ærbødighed og bøjen sig for eksperters udsagn' eller 'total mistillid og afvisning af samme', så forudsætter det en indsigt i matematisk modelbygning." (citeret efter Pilemann; 1996, p. 168)

De egenskaber der efterspørges både i dette citat og i Pedersen et al. (1994) og Nissen & Bjørneboe (1988), indfanges af begrebet *Mündigkeit*[24] som det er fremstillet af Ole Skovsmose (1994, p. 41), hvor det betegner

> "[...] that of having the capacity to speak for oneself. In that way *Mündigkeit* becomes an essential constituent of a critical citizenship. It unites features of a democratic competence together with a critical capacity. A person with *Mündigkeit* shows the capacity to take well-balanced decisions. Therefore it makes sense to educate for *Mündigkeit*, not to educate 'followers'. The main task of education is to prevent the occurrence of a new Auschwitz."

Mündigkeit er altså en personlig kapacitet i modsætning til det langt mindre ambitiøse begreb "myndighed", som sædvanligvis med juridiske undertoner refererer til den fulde opnåelse af rettigheder og ansvar i samfundet.

Matematikbrug og demokratisk distance

Med en ambition om at en given uddannelse skal bidrage til udviklingen af elevernes Mündigkeit, har matematikundervisningen oplagt en rolle at spille i forhold til de områder af livet som samfundsborger og privatperson, hvor matematik er eller kan bringes i sving på en måde, der er med til at "forme" hele situationen, jf. omtalen på side 72 af diskussionerne i forbindelse med Initiativet vedrørende Matematikundervisning.

Det grundforhold hvor en sådan "formattering" mest oplagt finder sted, er i udviklingen af teknologi: Matematik har indgået helt centralt i den udvikling der beskrives i Pedersen et al. (1994), fordi matematisk viden

[24] Begrebet forbindes ofte med Theodor Adorno fra "Frankfurterskolen" (se evt. Ramsay; 1996) og er fasttømret i tysk didaktik, jf. Skovsmose (1994, p. 40f).

og kunnen indgår mere eller mindre let genkendeligt i udviklingen af den teknologi der ligger til grund for professionaliseringen af forvaltningen[25].

Hvor let genkendeligt matematik indgår afhænger af hvilken teknologitype der er tale om. Ole Skovsmose skelner mellem fire former for teknologi: "manual tools (hammer), technology of natural processes (steam engine), social technologies (scientific management), information technology (computer science)" (Skovsmose (1988, p. 27f) og Skovsmose (1990b, p. 765)). Han påpeger, at matematik især i de to sidstnævnte teknologiformer er relateret til udviklingen.

I forlængelse heraf er der flere (Niss; 1984; Skovsmose; 1994) der argumenterer for, at matematik brugt som teknologi ikke kun finder sted i forhold til konkret foreliggende udfordringer – punktanvendelser (Blomhøj; 1992a, p. 29ff) – som fx budgetopstillinger eller konstruktionstegninger, men også i mange sammenhænge er med til at fastlægge den diskurs, som et givet problemfelt ses som indlejret i – fladeanvendelser (Ibid.).

Synligheden af matematikkens rolle i relation til de fire teknologiformer Ole Skovsmose adskilte, er på paradoksal vis mindre for de sidstnævnte teknologityper, hvor den er mest betydende for teknologiudviklingen, og det er derfor ikke mindst i kraft af fladeanvendelserne at matematik kommer til at indgå i skabelsen af den demokratiske distance som skitseres i Pedersen et al. (1994).

Et godt eksempel er den makroøkonomiske matematiske model ADAM[26] som Budgetdepartementet under Finansministeriet bruger flittigt i de analyser, som ligger bag den politik Finansministeriet har ansvaret for. Analysen består typisk i at lave prognoser over de økonomiske konsekvenser af et politisk tiltag, som man overvejer at gennemføre. For de involverede i sådanne prognoseopstillinger er brugen af ADAM udtryk for en punktanvendelse af et stykke matematisk teknologi. Det er ofte sådanne prognoser der er kilden, når medierne refererer hvordan økonomiske nøgletal som fx arbejdsstyrkens, renten eller udlandsgældens størrelse udvikler sig i årene fremover, og når det i bredere politiske kredse diskuteres hvilke politiske tiltag det er fornuftigt at iværksætte, sker det ofte med reference til prognoser fremstillet ved hjælp af ADAM, uden at forudsætningerne for modelberegningerne – eller selve det forhold at der er tale om en modelberegning – inddrages i diskussionen. I disse bredere sammenhænge er der tale om fladeanvendelse af en matematisk model, fordi brugen af ADAM

[25] Hvor forvaltning indebærer betydeligt mere end embedsværket, nemlig alle aktører mellem Folketinget og folket, fx lønmodtager- og arbejdsgiverorganisationer.

[26] Annual Danish Aggregated Model. Se Dræby et al. (1995) for en indføring i modellens grundlag og baggrund (anno 1995) samt en matematisk analyse af nogle kritiske forhold set i et demokratiperspektiv.

kommer til at udstikke rammerne for, hvilke variable der inddrages i de politiske diskussioner og hvilke former for konsekvenser af et politisk indgreb der tillægges vægt.

Et andet eksempel på en fladeanvendelse er hvordan matematik indgår i én af de måder, vi i Danmark fører miljøpolitik på: Fortyndingsstrategien. Den går i korte træk ud på at sprede giftstoffer tilstrækkeligt meget til at koncentrationen i udvalgte områder (typisk beboelsesområder) kommer under en eller anden kritisk værdi (grænseværdi). På baggrund af matematiske *dispersionsmodeller* (spredningsmodeller) beregnes hvor de udledte stoffer bevæger sig hen, og resultaterne af sådanne beregninger udgør en del af det politiske beslutningsgrundlag, igen uden at den "formatering" af diskussionen som modelanvendelsen medfører, problematiseres.

Det er nok ikke noget groft fejlskøn at kun en ganske lille del af befolkningen er vidende om, at matematik indgår helt centralt i sådanne beslutninger, for slet ikke at tale om *hvordan* matematikken indgår. Hvis det er tilfældet får argumenter som "matematikken lyver ikke" frit spil i en forstilt demokratisk debat. I de sidste årtier, hvor edb-teknologiens udvikling har gjort stadig større og mere komplekse modelberegninger mulige, har problemstillingen med mellemrum været til diskussion (se fx Nissen & Bjørneboe (1989b) og Madsen et al. (1995)), men kun blandt personer med professionel interesse for sagen og uden en efterfølgende folkelig debat, hvilket blot understreger det svært gennemskuelige ved problemet med matematiks bidrag til skabelsen af demokratisk distance.

4.5.5 Kritisk matematikundervisning

Kritisk matematikundervisning er en betegnelse for et perspektiv på matematik som undervisningsfag der tager direkte afsæt i nogle af de ovennævnte forhold: Et af uddannelsessystemets hovedformål bør være uddannelse til Mündigkeit, og i den sammenhæng er det centralt at gøre sig klart at matematik indgår som en central faktor i skabelsen af en demokratisk distance eller skævvridning, bla. som følge af professionaliseringen af forvaltningen. I Skovsmose & Nielsen (1996, p. 1257) beskrives det således:

> "Critical Mathematics education is described in terms of 'concerns' which cover the following issues:
>
> **a)** Citizenship identifies schooling as including the preparation of students to be an active part of political life.
>
> **b)** Mathematics may serve as a tool for identifying and analysing critical features of society, which may be global as well as having to do with the local environment of students.

c) The students' interest emphasises that the main focus of education cannot be the transformation of (pure) knowledge; instead educational practice must be understood in terms of acting persons.

d) Culture and conflicts raise basic questions about discrimination. Does mathematics education reproduce inequalities which might be established by factors outside education but, nevertheless, are reinforced by educational practice?

e) Mathematics itself might be problematic because of the function of mathematics as part of modern technology, which no longer can be reviewed with optimism. Mathematics is not only a tool for critique but also an object of critique.

f) Critical mathematics education concentrates on life in the classroom to the extent that the communication between teacher and students can reflect power relations."

Med en sådan skærpet opfattelse af forventningerne til matematikundervisningen er Bertel Haarders fordring om "indsigt i matematisk modelbygning" (jf. citatet på side 76) ikke længere tilstrækkelig. Som en slags "overbygning" på en sådan indsigt skal undervisningen bidrage til udviklingen af et mere generelt kritisk beredskab i forhold til brugen af matematiske modeller, fx ved eksplicit at arbejde med det meget forskelligartede (teoretiske) grundlag for en række veletablerede modeller (se fx Jensen; 1989).

Behovet for sådanne metaperspektiver på arbejdet med matematiske modeller i den matematikholdige undervisning kommer af at matematikanvendelsen er så grundlæggende fordi den på afgørende vis indgår i så mange af samfundets strukturer. Kritisk matematikundervisning peger på at sådanne strukturer må problematiseres, og vigtigere; at denne problematiseren skal gøres til genstand for undervisning – Mündigkeit følger *ikke* alene af faglig fordybelse i traditionel forstand.

I forhold til det kritiksyn der diskuteredes i relation til U90, virker et sådant syn måske stærkt individorienteret og samfundskritisk i den betydning, der i U90 udtryktes som "at skolen skal gøre de unge *samfundskritiske i den specielle forstand, at de får en negativ holdning over for det bestående samfund*". Denne udlægning slår dog næppe til i dag, dertil er det alt for unuanceret. Som nævnt er uddannelsessynet i U90 strukturorienteret, og som jeg også har været inde på er der idag behov for et mere individorienteret syn på uddannelse. Matematikundervisningen skal sigte mod både at lære den enkelte at bruge matematisk modellering som det kraftfulde værktøj det er og at forholde sig kritisk til andres brug af matematisk modellering, både når der er tale om umiddelbart foreliggende punktanvendelser og når det handler om synliggørelse og diskussion af magtforskydningen i forbindelse med diverse fladeanvendelser.

Overskridelse af aktør-struktur dualismen

For at forstå mekanismerne der nødvendiggør det skarpere kritikbegreb, som er indeholdt i kritisk matematikundervisning, virker det frugtbart at inddrage nogle begreber og tænkemåder udviklet af den kendte sociolog Anthony Giddens.

Ifølge Kaspersen (1996), som fremstillingen her bygger på, er Giddens' udgangspunkt, at dualismen mellem de sociologiske teoriretninger der orienterer sig mod henholdsvis struktur og individ skal overskrides. Aktør-struktur-forholdet skal ikke betragtes som en dualisme, men som en dualitet. Ved *strukturdualitet* forstår han således en sammenhængende relation, hvor struktur både ses som midlet *til* handlinger og resultatet *af* handlinger. Det at være med til at skabe en struktur samtidig med at man formes af den ser Giddens som samfundets strukturationsproces – den *sociale praksis*.

Ifølge Giddens kan en persons handlinger være underlagt hvad han kalder *praktisk bevidsthed*, dvs. være rutiniserede. Det er handlinger som man ikke behøver at tænke over for at udføre dem, og som man ikke gør rede for hverken overfor en selv eller andre, fordi det ikke er nødvendigt eller fordi man ikke kan. De fleste af de tilbagevendende handlinger fra dagligdagen foregår på dette bevidsthedsniveau; tage bussen, lave kaffe, møde op til en matematiktime etc. I modsætning hertil er *diskursiv bevidsthed*, som bruges i forhold til handlinger man selv reflekterer over og eksplicit kan gøre rede for baggrunden for, hvis situationen kræver det.

En af Giddens' centrale pointer er, at et socialt system som fx bybussernes daglige trummerum – hvor de hver dag kører de samme ruter, passagerer stiger på, køber billet, sætter sig, stiger af – skabes eller reproduceres af handlinger, der gentages, og derfor strækker sig ud over en enkelt handling: "Sociale systemer er social praksis, der reproduceres, hvorved et mønster af sociale relationer opstår" (Ibid., p. 403). Strukturer eksisterer ikke som en ydre ramme. Strukturer eksisterer kun i selve praksis, og man kan forstå strukturer som noget der fremkommer i vores hukommelsesspor, når vi reflekterer diskursivt over en tidligere udført handling. Sagt anderledes *er* strukturen ikke, den skabes hele tiden qua agenter der trækker på selvsamme struktur (eller rettere strukturelle egenskaber), når der handles (Ibid.).

Den traditionelle opfattelse af strukturer som strukturelle egenskaber bestående af regler og ressourcer indebærer et deterministisk element ("samfundet former individerne"). I Giddens begrebsapparat er struktur noget der både er mulighedsskabende og handlingsbegrænsende. Lars Bo Kaspersen (1996, p. 404) nævner sproget som eksempel:

> "Når jeg taler dansk, trækker jeg på nogle regler, der gør mig i stand til at formulere mig forståeligt. Samtidigt reproducerer jeg disse regler og dermed sprogets struktur. Sproget er mulighedsskabende i og med, at jeg kan udtrykke mine ønsker og intentioner, men i det øjeblik, mine motiver/ønsker ikke kan udtrykkes i ord, bliver sproget begrænsende. Ligeledes kan det danske sprog være en begrænsning, hvis jeg møder en person uden for dette sprogområde."

Pointen i forhold til kritisk matematikundervisning er, at hvis folk ikke bl.a. gennem uddannelsessystemet sættes i stand til at handle ud fra en diskursiv bevidsthed i forhold til handlinger med et demokratisk perspektiv, så forskydes den sociale praksis i retning af, at de strukturer som brugen af teknologi skaber, bliver mere handlingsbegrænsende end mulighedsskabende. Derfor må udviklingen af refleksiv bevidsthed eksplicit gøres til genstand for undervisning (Skovsmose; 1988).

4.6 En ny intern matematikforståelse?

Kan man tale om en ny intern matematikforståelse? Det spørgsmål har jeg ikke undersøgt systematisk og jeg kan derfor ikke komme med et analytisk motiveret svar, men min vurdering er at det korte svar er "nej". Ikke i almindelighed, hvis vi ser bort fra "matematikpersoner" (herunder matematiklærere) med ståsted i grundskolens matematikundervisning.[27] Der er god grund til at tro at den interne fagopfattelse der lå bag 60'er-matematikken, hvad forholdet til matematik som undervisningsfag angår stadig er til stede som en dominerende del af den nutidige matematikopfattelse, jf. omtalen af matematiklærernes uddannelsesbaggrund på side 28. Det er derfor ikke spor overraskende hvis disse lærere, som jeg tror, bærer rundt på en strukturalistisk matematikopfattelse som en væsentlig del af deres ballast som matematiklærere.

Der gøres dog fra forskellige sider forsøg på at ændre denne ellers ret fasttømrede tilgang til matematik som undervisningsfag gennem at tilbyde alternative indgange til diskussioner af matematik som grundvidenskabsfag. Jeg vil kort omtale to perspektiver som blandt andet har denne dagsorden.[28]

[27] Der er i almindelighed stor forskel på opfattelsen af matematik som undervisningsfag blandt seminarie- og universitetsuddannede personer. At det er tilfældet kan være en medvirkende årsag til de bredt erkendte *sammenhængsproblemer* mellem matematikundervisningen på grundskole- og gymnasieniveau, jf. Niss & Jensen (2002, p. 161f). På dette sted vil jeg ikke forfølge disse forskelligheder, men afgrænse problemfeltet til kun at omhandle den gymnasiale matematikundervisning.

[28] Et tredje perspektiv som kunne bringes på banen i denne sammenhæng er den amerikanske matematiklærerforening NCTM's meget omtalte "standards" (NCTM; 2000).

4.6.1 Socialkonstruktivisme som perspektiv

Det ene perspektiv handler om at anlægge et socialkonstruktivistisk syn på matematik, og er således et opgør med strukturalismen på dens egen "hjemmebane", matematikkens filosofiske grundlag. Den person der mest forbindes med dette arbejde, er Paul Ernest, som i Ernest (1991) bruger en analyse af matematikkens filosofi som indgang til at opstille et bud på en filosofi for matematikkens didaktik.

Ernest centrale position er, at opfattelsen af matematik ikke kan frakobles fagets relative position i forhold til andre "realms of knowledge". Matematik er forbundet med og en del af "the whole fabric of human knowledge". Som sådan er faget indlejret i vores historie og handlen og kan ikke adskilles fra de sociale og humanistiske videnskaber eller menneskelig kultur i det hele taget.

Han argumenterer derfor for, at en matematikfilosofi nødvendigvis må pege ud over matematikken selv, fx for at forklare hvorfor matematik er så anvendeligt i mange sammenhænge som må betragtes som ekstramatematiske ud fra en traditionel opfattelse af faget. Endvidere må matematik være fallibilistisk, dvs. afspejle det forhold, at fagets resultater er potentielt fejlbarlige og korrigerbare.

4.6.2 Kompetencebeskrivelser som perspektiv

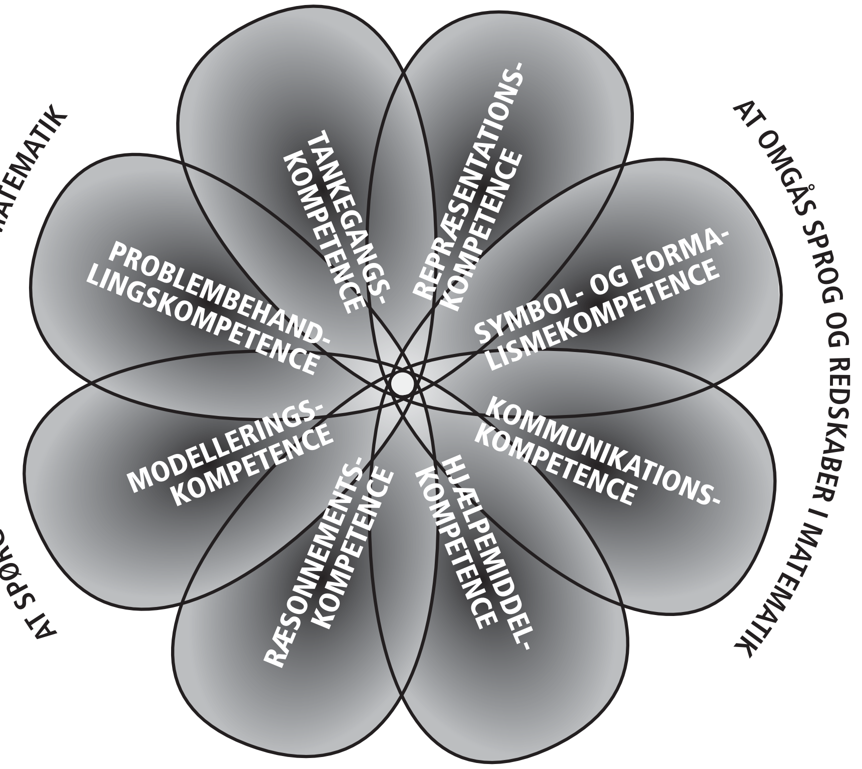
Det andet perspektiv på matematik som grundvidenskabsfag tager afsæt i spørgsmålet: *Hvad vil det sige at være god til matematik?* Et svar som med Mogens Niss som chefarkitekt vises stadig større interesse både i Danmark og internationalt, er at det vil sige at have udviklet en række matematiske kompetencer og former for overblik og dømmekraft i forhold til en række matematiske stofområder.

Den overordnede idé om at tænke i begge disse dimensioner – kompetencer og stofområder – når man overvejer det faglige indhold på forskellige uddannelser er blevet formet gennem de sidste ca. 30 år, parallelt med etableringen og matematik- og fysikuddannelserne på Roskilde Universitetscenter, men det første konkrete bud på et sæt matematiske kompetencer og former for overblik og dømmekraft fra Mogens Niss' hånd stammer fra 1997 og er første gang publiceret i Niss (1999b). Siden da er navngivningen, karakteristikken og analysen af en række afledte problemstillinger blevet skærpet i det Undervisningsministerielt initierede projekt "Kompetencer og matematiklæring", det såkaldte KOM-projekt[29], som løb fra sommeren 2000 til sommeren 2002 med Mogens Niss som formand for

[29] Se http://www.nyfaglighed.emu.dk/, hvor både den afsluttende rapport og noget baggrundsinformation kan findes.

arbejdsgruppen og mig som akademisk sekretær.

I den afsluttende rapport (Niss & Jensen; 2002) præsenteres otte matematiske kompetencer som gengivet i figur 4.1 og tre former for "overblik og dømmekraft vedrørende a) matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder, b) matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning, og c) matematikkens karakter som fagområde" (Ibid., p. 67).



Figur 4.1 En visuel repræsentation af de otte matematiske kompetencer som KOM-rapporten opererer med, her i en grafisk forbedret men indholdsmæssigt uændret udgave (Niss & Jensen; 2002, p. 45).

Både selve grundtanken om at medindtænke et sæt af faglige kompetencer i en karakteristik af et fags substans og Mogens Niss' konkrete bud herpå for matematiks vedkommende vender jeg tilbage til i kapitel 9 (si-

På samme adresse findes også information om og rapporter fra tre søster-projekter til KOM-projektet med fokus på henholdsvis dansk som undervisningsfag (Gregersen et al.; 2003; Elf & Østerlund; 2003), naturfaglige uddannelser (Andersen et al.; 2003; Busch et al.; 2003) og fremmedsproglige uddannelser (Harder et al.; 2003).

de 155ff). Der er fokus på nogle didaktiske potentialer ved denne måde at tænke faglighed på, hvilket også var begrundelsen for valget af faglige kompetencer som det centrale analytiske værktøj i KOM-projektet.

I sammenhængen her hvor det handler om perspektiver på matematik som fag, er det interessante ikke så meget valget af kompetencebegrebet som tilgang, men at de former for aktiviteter som ifølge buddet her bør opfattes som en naturlig del af konstitueringen af matematik som fag, repræsenterer en markant udvidelse af horisonten i forhold til de seneste mange århundreders opfattelse af faget. Med 60'er-matematikken som bannerfører har tidligere tiders perspektiv været totalt domineret af symbol- og formalismekompetence og ræsonnementskompetence (uden at de ord har været anvendt), bedømt ud fra indholdet på de mindst 10 kandidatuddannelser i matematik som jeg kender til eller har hørt om fra andre. Sikkert er det i alle fald, at anvendelser af faget på fremmede territorier, som i KOM-viften optræder rendyrket i skikkelse af modelleringskompetence, ikke ville have været en del af en tænkt kompetencebeskrivelse af tidligere tiders matematikopfattelse. I forhold til fokus i projektet bag denne afhandling er inklusionen af modelleringskompetence selvsagt et interessant forsøg på at skubbe til fagopfattelsen af matematik på "aksiomniveau".[30]

4.6.3 Fra matematikundervisning til matematik

De to perspektiver på matematik – socialkonstruktivisme og kompetencebeskrivelser – er på mange måder meget forskellige, men har dog en interessant ting til fælles: Motivationen til at arbejde med opfattelsen af matematik som grundvidenskabsfag kommer fra et ønske om at flytte matematik*undervisningen* i en retning, som er et direkte opgør med 60'erreformatorernes tilgang til de didaktiske spørgsmål.

Hvad det angår mener jeg de to perspektiver er udtryk for et generelt tidstypisk skift fra 50'erne til nu i forholdet mellem overvejelser om henholdsvis matematik og matematikundervisning. I årene før og efter 60'ermatematikkens indførelse var det diskussioner internt i matematikersamfundet om matematikkens grundlag og substans, der via etableringen af strukturalismen som matematikfilosofi gav anledning til en skærpet holdning til matematikundervisningens grundspørgsmål om hvorfor, hvad og hvordan.

Siden da er diskussionerne om matematikundervisningens formål og

[30] Det samme mener jeg kunne siges om inklusionen af kommunikations- og hjælpemiddelkompetence og overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder og matematikkens historiske udvikling, men det vil jeg ikke forfølge yderligere her i afhandlingen.

indretning set fra et samfundsperspektiv foregået på tværs af det eksterne/interne tilhørsforhold til matematikundervisning. Opblandingen af diskussionskulturerne, som utvivlsomt er blevet næret af udviklingen af matematikkens didaktik som selvstændig videnskabelig disciplin siden sidst i 60'erne,[31] har medført at det ikke længere er frugtbart at bruge en skelnen mellem den interne og eksterne fagopfattelse som analytisk værktøj. Som overskrifterne på dette og forrige afsnit indikerer, mener jeg nu det i højere grad er hvorvidt det er matematik eller matematikundervisning man forholder sig til, der er den interessante analytiske opdeling. Blandt andet giver det anledning til at bemærke, at det i stigende grad er overvejelser over grundliggende matematikdidaktiske problemstillinger der giver anledning til forsøg på at nytænke hvad matematik egentlig er for en fisk, ofte – bl.a. i de to ovennævnte tilfælde – drevet frem af klassisk universitetsuddannede matematikeres skifte til det matematikdidaktiske forskningsfelt.

4.7 Afrunding

Som et led i at indkredse hvordan inddragelsen af anvendelser af matematik i matematikundervisningen har udviklet sig siden først i 1970'erne peger Mogens Niss (1989, 2003) på fem begrundelser for at tillægge anvendelser stor vægt, som efter hans vurdering indfanger størstedelen af de forskellige argumenter som har været fremme i diskussionerne.

To af begrundelsestyperne har et internt fagligt perspektiv. Det drejer sig om "The 'picture of mathematics' argument" og "The 'learning of mathematics' argument", som kort og forsimplet drejer sig om lade anvendelser indgå i matematikundervisningen som et led i at vise hvad matematik er for et fag, henholdsvis for at styrke udviklingen af den matematiske begrebsforståelse (Niss; 2003, p. 276).

De tre øvrige begrundelsestyper er de interessante i forhold til analysen her, fordi de vender forholdet mellem matematik og den omgivende verden om. De kan ses som hver deres svar på hvad anvendelser af matematik kan bidrage med i forhold til at lære elever og studerende at mestre livet udenfor matematikkens verden, og dermed – via spørgsmålet om hvad matematik(uddannelse) kan bidrage med i forhold til at lære at anvende matematik – også til hvad matematik(uddannelse) generelt kan gøre for livet udenfor matematikkens verden. Det drejer sig om (Ibid., p. 275):

> "(a) *The 'utility' argument.* Ultimately, the majority of students of mathematics will be users rather than producers or reproducers of mathematics. Since experience shows that the ability to use mathematics is not an auto-

[31] Historikken er godt beskrevet i Kilpatrick (1992).

> matic consequence of knowing or even mastering pure mathematics, this ability has to be taught. So, applications and modelling should be included in the mathematics curriculum (at least for the majority of students) in order to enable them to use mathematics in other fields inside or outside of school.
>
> (b) *The 'critical competency' argument.* It is a fact that mathematics is being widely used in society, actually to such an extent that it contributes to the shaping of society, for better and for worse. Multitudes of decisions and actions of great societal and social significance are being taken under the involvement of mathematics. Whether such use is justified or not, it requires both mathematical and application and modelling competencies to understand and judge it. So, applications and modelling should be included in the mathematics curriculum in order to equip its recipients with a critical competency that allows them to understand and judge socially significant uses of mathematics.
>
> (c) *The 'formative' argument.* It is a major goal of mathematics education to help the formation of active, autonomous, creative, and flexible individuals. One aspect of this is the ability to identify, pose, formulate, handle, and ultimately solve problems that one encounters on one's way. Sometimes such problems may involve the use of mathematics, not infrequently in a non-routine setting. Sometimes they don't. However, in either case applications and modelling are an efficient tool for fostering general problem solving attitudes, abilitites and behaviours in individuals. So, this is a reason for including applications and modelling in the mathematics curriculum."

Sammen med opdelingen i økonomisk/tekniske, politisk/kulturelle og individorienterede årsager til matematikundervisning (jf. omtalen på side 31) er denne typisering et nyttigt redskab i forbindelse med en opsummering af, hvad jeg ser som de væsentligste elementer i den udvikling af fagopfattelsen af matematik, som jeg i dette kapitel har forsøgt at tegne et billede af.

4.7.1 Fagopfattelsen omkring 1960

Den eksterne fagopfattelse var – jf. den første opsummering i afsnit 4.3 (side 57) – stærkt præget af et ønske om at forfølge den økonomisk/tekniske årsag: Tilrettelæggelsen af matematikundervisningen skulle tage afsæt i behovet for at kvalificere (dele af) befolkningen til at forstå, udnytte og videreudvikle teknologiske fremskridt til samfundets bedste. Fokus var med andre ord på udviklingen af elevernes *teknologiske kompetence*.

I forhold til det at arbejde med anvendelser i matematikundervisningen er det derfor ikke overraskende at nytte-argumentet dominerede de eksterne diskussioner, som gennemgående var præget af et ønske om en anvendelsesorienteret matematikundervisning, og en tro på at en sådan undervisning har potentialer i retning af den ønskede udvikling af teknologisk kompetence.

Den interne fagopfattelse kan føres tilbage til den politisk/kulturelle årsag. Matematikundervisningen skulle tilrettelægges på en konsistent og tidssvarende måde gennem hele uddannelsessystemet ved at man overalt tog udgangspunkt i en strukturalistisk tilgang til matematik som tilrettelæggelsesskabelon. På begrundelsesniveau var man ikke uenig med folkene udenfor matematikersamfundet om at et væsentligt formål med reformerne var at udvikle befolkningens teknologiske kompetence, man foretrak bare en anden vej til det samme mål.

I forhold til det at arbejde med anvendelser i matematikundervisningen var det således "billedet af matematik"-argumentet og det formative argument der blev fremført med omvendt fortegn: Ja, matematikundervisningen skal tegne et repræsentativt billede af hvad matematik er for et fag, men det betyder at anvendelser må vige til fordel for de abstrakte strukturer som konstituerer grundvidenskabsfaget. Og ja, matematikundervisningen kan og skal levere sit væsentlige bidrage til formningen af aktive, autonome, kreative og fleksible individer ved at gøre eleverne i stand til at anvende deres matematiske viden og kunnen i forhold til ikke-rutineprægede udfordringer, men i den sammenhæng er potentialet ved direkte kontekstbunden beskæftigelse med anvendelser af matematik i konkrete situationer ikke nær så stort som potentialet ved at lære at beherske rene, abstrakte matematiske strukturer med generel gyldighed (Niss; 2003, p. 277).

4.7.2 Udviklingen af fagopfattelsen siden 1970'erne

Den interne og eksterne opfattelse af matematikundervisning er i stigende grad blevet meningsløs at betragte som adskilte størrelser, fordi en stadig større del af matematikundervisningens aktører blander sig i samfundsdebatten og anlægger samfundsmæssige perspektiver på matematikundervisningens plads i den samlede uddannelsesvifte. På den måde kommer de interne synspunkter til at optræde som en integreret del af den eksterne opfattelse af matematikundervisning.

Udviklingen af selve opfattelsen af matematikundervisning er karakteriseret ved to ting. For det første er ønsket om at bidrage til udviklingen af teknologisk kompetence blevet fastholdt og udviklet i kraft af et mere nuanceret syn på hvad teknologi er for en størrelse. For det andet har en øget opmærksomhed på at brugen af teknologi både kan virke mulighedsskabende og handlingsbegrænsende været medvirkende til, at et ønske og en forventning om at matematikundervisningen skal bidrage til udviklingen af deltagernes *demokratiske kompetence* er blevet en mere og mere central del af fagopfattelsen. Denne fordring, som i Danmark fik luft under vingerne i 1970'erne, har i sig selv gennemgået en udvikling qua en nuancering af kritik-begrebet, så "uddannelse til demokrati" i stigende grad fortolkes som uddannelse til Mündigkeit, ikke bare til myndighed som man kunne fristes til at mene, hvis demokratibegrebet bruges for snævert. Som et sundt demokratisk træk indebærer det, at den individorienterede årsag til at ville udbyde (matematik-)undervisning indtager en stadig større plads i det samlede billede.

I forhold til det at arbejde med anvendelser i matematikundervisningen er der sket en tilsvarende, men mere specifik udvikling af opfattelsen: Nytte-argumentet er stadig det de fleste diskussioner kredser om, men argumenter med fokus på kritisk kompetence er kommet til som en del af diskussionen der vises stadig større opmærksomhed, hvilket kan ses som matematikdidaktikkens væsentligste bidrag til indplaceringen af matematik i rækken af fag som kan og skal bidrage til udviklingen af demokratisk kompetence.

Desuden har mange matematikeres og matematiklæreres øgede orientering mod samfundsmæssige perspektiver på matematikundervisningen været en væsentlig årsag til, at det nu alle steder i uddannelsessystemet (med nogle af kandidatuddannelserne i matematik som en interessant undtagelse) anses for et uomgængeligt krav at arbejde med anvendelser indtager en væsentlig rolle i matematikundervisningen, fordi inddragelsen heraf anses for at have væsentlige potentialer i forhold til udvikling af både teknologisk og demokratisk komeptence.

Opfattelsen af matematik som grundvidenskabsfag er som det dominerende træk ikke ændret væsentligt siden 1960'erne. Når det er sagt er det interessant, at de eksisterende forsøg på at gøre op med den ensidigt strukturalistiske fagopfattelse er næret af et ændret internt syn på matematik*undervisning*, som har motiveret en matematikopfattelse der i modsætning til strukturalismen indtænker fagets placering og rolle i forhold til det omgivende samfund.

5 Potentialer – et kognitions-psykologisk perspektiv

Dette kapitel består af to hoveddele. I første del, som består af afsnit 5.1-5.3, fremlægges hovedtrækkene i nogle kognitions-psykologiske modeller for vidensrepræsentation. I anden del, afsnit 5.4, analyserer jeg hvad der med udgangspunkt i disse modeller kan siges at karakterisere og skabe "produktiv tænkning".

Det mest centrale begreb at få karakteriseret i den sammenhæng er *forståelse*: Alle normale voksne mennesker ved fra egne erfaringer, hvordan det føles at have forstået noget. Men hvad der udgør *forskellen* på at have og ikke at have forstået noget har de færreste en ide om. Hvordan kan man fx karakterisere forskellen på den måde du og jeg – med en følelse af at forstå, hvad der foregår – løser en ligning eller læser den tilsendte årsopgørelse igennem, og den måde en person uden denne følelse af forståelse gør det på. At sammenligne det ydre produkt af anstrengelserne – ligningens løsning henholdsvis arkiveringen af den accepterede årsopgørelse – er ikke svaret. De kan sagtens være ens selv om den forståelse der ligger bag, ikke er det.

Den teoretiske ramme som diskussionen foregår indenfor, bygger på en central antagelse: Mens *kommunikation* med andre kræver at der eksisterer *eksterne repræsentationer* i form af konkrete objekter, billeder eller mere abstrakte symboler som fx navne[1], så forudsætter *tænkning* at der eksisterer tilsvarende *interne repræsentationer* i hovedet på den enkelte, og tænkningen giver sig udslag i, at repræsentationerne er *strukturerede* (Hiebert & Carpenter; 1992; Skemp; 1986/1971).

En sådan tilgang til studiet af kognitive funktioner er den moderne kognitions-psykologis naturlige forlængelse af gestalt-psykologernes fokusering på tankeprocesser (jf. omtalen på side 34f). Ideen om at mennesker

[1] Det gælder både konkrete fysiske objekter som hængekøje, familie og matematiklærer og abstrakte – fx matematiske – ideer som harmoni, kærlighed og differentialkvotient.

fortolker den oplevede virkelighed frem for at absorbere den, såkaldt *psykologisk konstruktivisme*, er således ikke ny, jf. Ernest (1991, p. 102f) og Schoenfeld (1987a, pp. 20-24). Den kognitive psykologis bidrag de sidste knap 30 år består i, at man nu har opstillet og eksperimentelt afprøvet detaljerede modeller for, hvordan konstruktionen og repræsentationen af viden kan tænkes at foregå, så kognitions-psykologerne nu er enige om at valget står mellem to modeller med mange ideer til fælles (Hiebert & Carpenter; 1992, p. 67). Det er disse modeller jeg nu vil skitsere hovedtrækkene i, inden jeg i afsnit 5.3 ser på hvilke bidrag til forståelsen neurovidenskabens direkte studier af hjernen kan give.

5.1 Begrebsdannelse: En hierarkisk model

Den model for begrebsdannelse jeg her vil præsentere, bærer tydeligt præg af at være udviklet under informationsbehandlings-paradigmet. Det er den *information* vi får ud af at interagere med omgivelserne, der repræsenteres internt, ikke omgivelserne selv. Der er derfor tale om *symbolske* repræsentationer, hvor et symbol er et mønster i hukommelsen som står for eller refererer til noget uden for sig selv, det være sig i omgivelserne eller i andre dele af hukommelsen.

5.1.1 Analoge og propositionelle repræsentationer

Kognitive psykologer skelner i den forbindelse mellem henholdsvis *analoge* og *propositionelle* symbolske interne repræsentationer (Gade; 1997, p. 101). Analoge repræsentationer kan fx være billeder for det "indre blik" af en bestem person eller ting, eller det kan være repræsentation i form af en lyd eller duft. Tænk for eksempel på hvilken form for erindring du får "slået an", når ord som "bedsteforældre", "kæreste" eller "lyn" nævnes. Det vil nok primært være analoge repræsentationer som henholdsvis "duften af en bestemt pibetobak og dagligstuen set fra sofaen", "smilet og lydene når I ... vasker hænder" og "lysglimt i mørke og høj buldren", snarere end "de to personer der har født min far/mor", "den person jeg deler hjem og seng med" og "lysglimt fremkaldt af elektrisk udladning mellem skyer og jord".

Sidstnævnte former for erindring ville være dominerende, hvis "bedsteforældre", "kæreste" og "lyn" havde karakter af propositionelle repræsentationer, hvilket for de fleste ikke er tilfældet. Det gælder derimod ord der betegner ideer eller begivenheder, som fx "demokrati" eller "Trediveårskrigen", da de – snarere end billeder, lyde eller dufte – giver diskuterbare (propositionelle) erindringer om den relative placering i en eller anden sammenhæng. Med eksemplerne "demokrati" og "Trediveårskrigen" kan det fx være “styreform hvor alle har *lige meget* indflydelse” og “Krig der fandt sted *i perioden* 1618 – 48”.

Jeg beskæftiger mig her kun med propositionelle repræsentationer, hvilket bl.a. skyldes at det – som eksemplerne gerne skulle indikere – er at “skille hovedet fra kroppen” at diskutere analoge repræsentationer uden at inddrage de affektive forhold, hvilket jeg som nævnt i afsnit 3.2.1 (side 32) har afgrænset mig fra. Indholdsmæssigt kan dette fravalg imidlertid også begrundes med, at propositionel repræsentation er et karakteristisk træk ved ord som repræsenterer abstrakte matematiske ideer som “strukturalisme” og “differentialkvotient”. For eksempel vil vi som matematiklærere direkte betragte det som udtryk for en fejlopfattelse, hvis “differentialkvotient” hos en elev frembringer billedet

$$f'(x)$$

uden at denne analoge repræsentation har en propositionel pendant.

5.1.2 Begrebshierarkier

En udbredt tilgang til hvordan hjernen propositionelt repræsenterer og systematiserer de millioner af informationer den dagligt modtager fra sanseapparatet, er at forestille sig, at det sker gennem såkaldt *hierarkisk begrebsdannelse*.

Den grundlæggende ide til hvordan det foregår bygger på en konstatering af, at vi som mennesker har en evne til at *abstrahere* fælles egenskaber blandt de forskellige ting eller situationer, vi oplever, og konstant og uopfordret forsøger at *klassificere* nye indtryk svarende hertil.

At det forholder sig sådan er tydeligt at se ved at observere mindre børn, der oftere end voksne klassificerer på en ukonventionel måde der springer i øjnene, fordi deres erfaringsgrundlag endnu ikke er så udbygget. Skemp (1986/1971, p. 19) nævner som eksempel, at et barn på to år der første gang ser en baby kravle henover gulvet, kan finde på at gå hen og stryge babyen over ryggen og klappe den på hovedet som om det var en hund. Hvorfor? Fordi den to-årige har set adskillige hunde i sit liv, og på den baggrund har abstraheret “bevæge sig på fire ben” som en definerende egenskab ved hunde. Alle nye indtryk der har denne egenskab, inklusive en kravlende baby, klassificeres derfor som værende en hund og behandles derefter.

Den centrale antagelse i modellen er så at processen med at abstrahere og klassificere medfører *varige mentale ændringer*, ved at de fællestræk der abstraheres ud af den større sammenhæng, får en selvstændig repræsentation i hjernen. Herved er der dannet et nyt *begreb*:

> "*Abstracting* is an activity by which we become aware of similarities (in the everyday, not the mathematical, sense) among our experiences. *Classifying* means collecting together our experiences on the basis of these similarities. An *abstraction* is some kind of lasting mental change, the result of abstracting, which enables us to recognize new experiences as having the similarities of an already formed class. Briefly, it is something learnt which enables us to classify; it is the defining property of a class. To distinguish between abstracting as an activity and an abstraction as its end-product, we shall hereafter call the latter a *concept*." (Skemp; 1986/1971, p. 21)

Anna Sfard (1991, p. 16ff) opererer med en lignende tredeling af begrebsdannelsesprocessen. Hun betegner de tre faser som henholdsvis *interiorization*, *condensation* og *reification*. Som et vigtigt bidrag til modelforståelsen betoner hun, at de to førstnævnte faser er væsensforskellige fra den sidstnævnte: Både interiorization og condensation er udtryk for *processer* som den lærende arbejder sig igennem, mens reification er udtryk for et "spring" i bevidsthedsniveauet.

Ved interiorization "vænner" man sig således gradvist til en bestemt måde at *internalisere* nye erfaringer på, mens condensation udtrykker fortsættelsen af denne proces frem mod en opfattelse af disse erfaringer som et "hele"; erfaringerne *kondenseres* så kun fællestrækkene forbliver tilbage. Begge disse former for intern repræsentation sker i forbindelse med at man "bearbejder" de nye indtryk mentalt, og er derfor noget der uundgåeligt tager et vist stykke tid. Kondenseringsfasen varer så længe et eller flere nye indtryk stadig internt er tæt knyttet til en sådan bearbejdning. Fra et vist tidspunkt vil det imidlertid ikke længere være tilfældet; fællestrækkene er blevet repræsenteret som et *selvstændigt* begreb. Det er denne momentane "løsrivelse" fra erfaringsgrundlaget, Sfard betegner reification. Objektgørelse, som jeg mere mundret vil bruge synonymt med reification, er således defineret som et ontologisk skift; en pludselig evne til at se noget velkendt i et helt nyt lys (Sfard; 1991, p. 20).

Eksempler

Lad os se på to eksempler Sfard nævner, der illustrerer sammenhængen mellem modellens tre faser i begrebsdannelsen.

Hvis en person har dannet begrebet "negative tal" kan *internaliseringen* bestå i, at vedkommende bliver gradvist mere sikker i subtraktion som en isoleret aktivitet. *Kondenseringen* kan som en naturlig fortsættelse heraf bestå i at vedkommende arbejder sig frem mod at kunne udskille det karakteristiske ved subtraktion i forhold til addition, multiplikation osv., ved at kunne gennemføre aritmetiske manipulationer med stadig større kompleksitet; først kun med addition og subtraktion af positive tal, så med multiplikation inddraget, så med addition og subtraktion af både positive og negative tal osv.. Springet til at kunne betragte "negative tal" som et *selvstændigt objekt* er så sket når vedkommende kan betragte negative tal som en ægte delmængde af de reélle tal *uafhængigt* af aktiviteten "subtraktion".

I forbindelse med begrebet "funktion" består *internaliseringen* bl.a. i at blive gradvist mere sikker i at udregne værdier af den afhængige variabel for givne værdier af den uafhængige variabel ved hjælp af en regneforskrift. *Kondenseringen* består i dette tilfælde i at blive sikrere og sikrere i at operere med funktioner uden at interessere sig for specifikke værdier af den uafhængige variabel. Operationerne kan fx bestå i at tegne grafer, multiplicere og dividere funktionsudtryk med hinanden, samt finde sammensatte og inverse funktionsudtryk. At "funktion" er dannet som selvstændigt objekt kan fx vise sig ved evnen til at løse ligninger hvor et funktionsudtryk er den ubekendte, fx differentialligninger, eller ved at kunne *fortælle* om funktioners generelle egenskaber og processer udført med funktioner, der under kondenseringsfasen kun eksisterede som færdigheder.

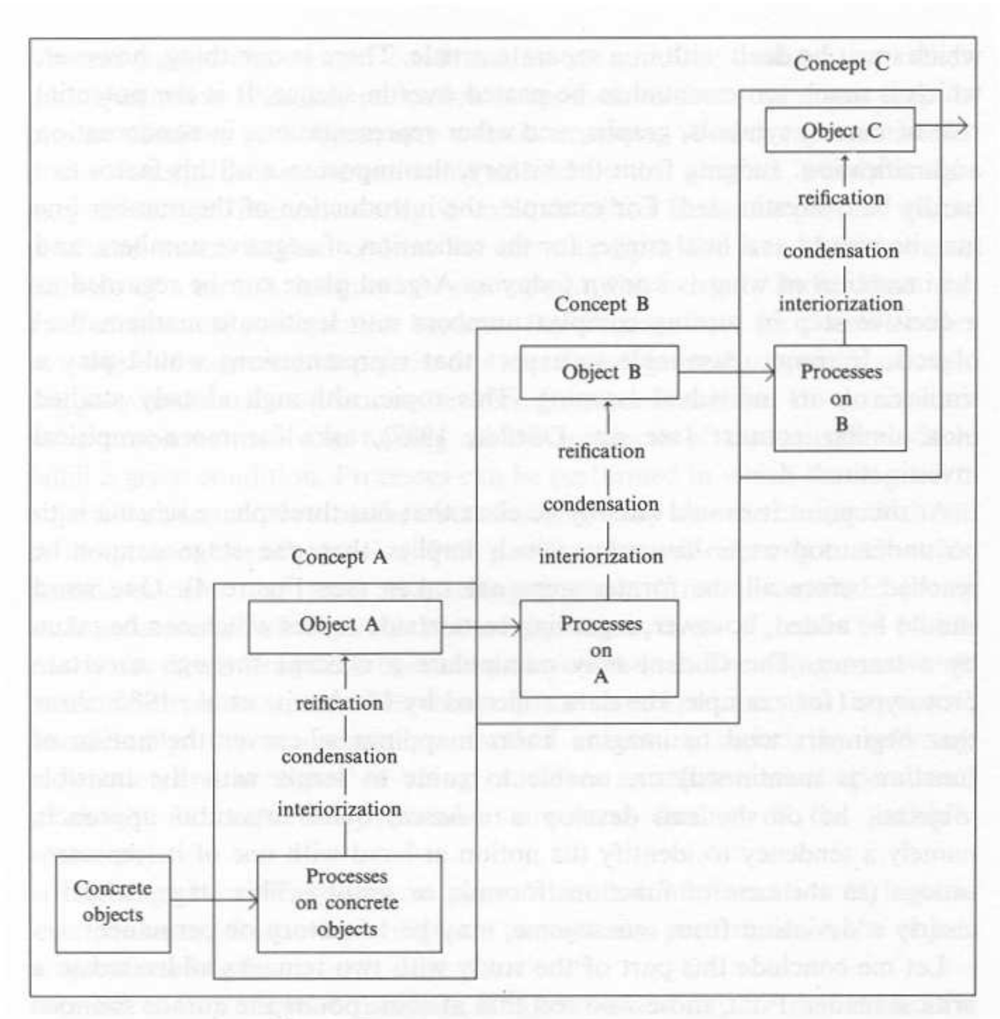
Begreber som grundlag for nye begreber: En hierarkisk struktur

Begreber der på basis af "trefase-modellen" er abstraheret direkte fra umiddelbare sanseerfaringer, kaldes *primære begreber*. Fra disse begreber kan vi så abstrahere begreber af højere orden, som så igen kan danne grundlag for begreber af endnu højere orden etc., hvilket ordner begreber i forskellige hierarkier. "Af højere orden end" betyder abstraheret fra, direkte eller indirekte. "Mere abstrakt" betyder her "fjernere fra direkte sanseerfaringer", hvilket passer med hverdagsbetydningen af ordet "abstrakt". På figur 5.1, der er en illustration af ideen om hierarkisk begrebsdannelse, vokser abstraktionsniveauet jo højere op man kommer i "kæden" af begreber.

En karakteristik som denne af forholdet mellem flere begreber giver selvfølgelig kun mening hvis begreberne tilhører samme hierarki. For eksempel kan vi ikke ud fra disse retningslinjer sammenligne "A-dur" med "rød", selv om de fleste nok vil betragte "A-dur" som mest abstrakt (Skemp; 1986/1971, p. 24).

5.1.3 Hierarkisk begrebsdannelse og brugen af definitioner

Et umiddelbart resultat af at betragte begreber som hierarkisk ordnede er, at der er en modsætning mellem hvordan et begreb opfattes mens der arbejdes med at danne det, og hvordan det opfattes *efter* det er dannet: Så længe der arbejdes med begrebsdannelsen er den aktive bearbejdning af specialtilfælde for de fleste et nødvendigt udgangspunkt, fx i form at operationer med andre mindre abstrakte matematiske begreber, mens begrebet



Figur 5.1 Generel model af hierarkisk begrebsdannelse. Fra Sfard (1991, p. 22).

som selvstændigt velafgrænset objekt er et fjernt mål at stræbe efter. Efter dette mål er nået og begrebet har fået "eget liv", er det centrale netop at afgrænse begrebet så skarpt som muligt fra andre beslægtede begreber, hvilket indenfor matematikkens verden er den rolle en *definition* har.

Lige så velanbragt definitioner er som hjælp til en skærpet afgrænsning *efter* et begreb er dannet eller *undervejs* i dannelsesprocessen, lige så ubrugelige er de imidlertid som *erstatning* for begrebsdannelsen. At forsøge på denne vis at forcere processen svarer til at forsøge at øge en persons omsætning af kulhydrater ved at tvinge ham til at sluge maden:

> "If the structural approach [det 'løsrevne' begreb] is more abstract than the operational [den aktive bearbejdning af specialtilfælde], if from the philosophical point of view numbers and functions are basically nothing but processes, if doing things is the only way to somehow 'get in touch' with abstract constructs – if all this is true, then to expect that a person would arrive at a structural conception without previous operational understanding seems as unreasonable, as hoping that he or she would comprehend the two-dimensional scheme of a cube without being acquainted with its 'real life' three-dimensional model." (Sfard; 1991, p. 18f.)

Skemp nævner som eksempel på det samme, hvordan man skal forklare en tidligere blind der netop har fået synet igen, hvad "rød" er (Skemp; 1986/1971, p. 23f.). Et forsøg på en definition kunne være: "Rød er den farve vi oplever fra lys med bølgelængde i intervallet 0-6 mikrometer". Lige så nyttig en sådan definition kan være for en fysiker, lige så ubrugelig er den selvfølgelig for vores blinde ven. Der er ingen vej uden om at vise ham eller hende en masse ting med forskellige farver, og så – ved et nævne hvilke af tingene, der lever op til karakteristikken "rød" – lade vedkommende danne begrebet selv.

5.2 Begrebsrelationer: Schema-teorien

I forhold til den videre analyse er det et centralt træk ved hierarkisk begrebsdannelse, at begreber ifølge denne model er gensidigt forbundet ved hjælp af *meningsgivende relationer* mellem dem, og at disse relationer er styrende for hvilke begreber der aktiveres samtidigt.

At det er tilfældet betyder at egenskaberne ved en given begrebsstruktur ikke kan vurderes ved blot at "summere" meningsindholdet i hvert af de indgående begreber isoleret betragtet. Herved overses netop betydningen af begrebernes indbyrdes relationer, hvilket ofte er det afgørende for netop denne strukturs egenskaber i forbindelse med udførelsen af de kognitive processer. Skemp (1986/1971, p. 37) nævner som analogi, at det vel er de færreste der på basis af viden om de separate egenskaber for transistorer, modstande, ledninger osv. kunne have forudsagt, at når disse dele forbindes på passende vis resulterer det i muligheden for at høre radioudsendelser.

For at understrege betydningen af at betragte en begrebsstruktur som et aktiverbart samlet hele indføres (med reference til Piaget) betegnelsen *schemata* for sådanne strukturer:

> "A schema is an activated part of a semantic network. [...] Thus, a schema is always a representational, permanently modifiable unit, a meaning structure of a particular (although restricted) scope that represents actions, operations [...] or concepts." (Steiner; 1994, p. 250)

Et schema, eller en *aktiveret semantisk struktur* som jeg vil kalde det, kan således sige at indeholde to ting: Dels en aktiveret viden om *meningsindholdet i en række begreber* fra et semantisk netværk, dels *regler eller algoritmer* der fastlægger de korresponderende *forbindelser* mellem disse begreber, og som gør det muligt at de kan fungere som en integreret helhed.

5.2.1 Eksempler

Indenfor et domænespecifikt område af en persons semantiske netværk som algebraisk matematisk viden kan der fx optræde begreber som "tal", "brøker", "ligninger", "funktioner", "mængder", "variable" osv., som hver især repræsenterer en viden om en masse konkrete eksempler på tal, brøker osv.. Forbindelserne mellem disse begreber vil så inden for domænet bestå af matematiske operationer fra de simpleste hentet fra aritmetikken op til – for eksempel – operationer fra infinitesimalregningen som differentialer og integraler.

En aktiveret semantisk struktur kan så fx være knyttet til "ligningsløsning", forstået som at en person konfronteret med en ligning som for eksempel

$$4x - 3 = -1 + 2x$$

uopfordret vil aktivere begreber som "variabel", "konstanter", "lighedstegn" og "løsning", og forbindelser som "lige så stor som", "af samme slags som", "på samme side af lighedstegnet som" og "kan reduceres til". En anden person vil måske – konfronteret med samme ligning – aktivere en semantisk struktur knyttet til "ligningsløsning" bestående af bl.a. begreberne "bogstaver", "tal" og "vippe", og forbindelserne "blandet sammen", "står alene", "samle sammen", "flytte rundt på vippen uden at den tipper" osv.. Der kan således være stor forskel på hvilken semantisk struktur den samme opgave aktiverer hos to forskellige personer. Betydningen heraf i forhold til forskellige forståelsesmæssige "platforme" for videre læring vender jeg tilbage til senere.

På hvert sted i begrebsabstraktionen kan et givet begreb indgå som grundlag for abstraktion af begreber inden for mange forskellige domæner (Skemp; 1986/1971, p. 37). For eksempel vil begrebet "bil" for de fleste sammen med begreber som "bus", "tog" og "fly" være med til at konstituere begrebet "transportmiddel", og således konstruktivt aktiveres i forbindelse med den semantiske struktur repræsenterende handlinger som "hvordan skal jeg bringe mig hen til . . . ". For nogle vil "bil" imidlertid også være klassificeret som "statussymbol", for en økonom som "importvare", for en mekaniker som "levebrød" osv., i hvert tilfælde med mulighed for at "bil" aktiveres som en del af en ny handlingsbetinget semantisk struktur.

Eksemplet skal tjene til illustration af, at hvert enkelt begreb kan have *relationer* til mange andre begrebsstrukturer og således blive aktiveret i mange forskellige kontekster.

Det gælder også mere abstrakte begreber. For eksempel vil et begreb som "variabel" for dig som matematikkyndig blandt andet indgå i aktiverbare semantiske strukturer sammen med matematiske begreber som "funktion", "skalar" osv., hvorfor du kan bringe disse begreber i spil samtidigt, mens det for mange andre slet ikke eksisterer som begreb, og hvis det gør så strukturelt sammenhængende med hverdagsrelaterede begreber som "renteniveau", "indkomst" etc..

Det samme gælder begrebet "funktion". At have dannet det som matematisk begreb betyder som nævnt tidligere at man kan kan operere med det i forskellige sammenhænge, diskutere betydningen af inverse og sammensatte funktioner osv.. Men for mange har begrebet "funktion" kun mening i sammenhænge som at "have en funktion på arbejdet", "foretrække funktionelt design" osv., hvorfor alene det at snakke om inverse og sammensatte funktioner virker absurd.

5.2.2 Sammenfatning

Sammenfattende kan jeg forsøge at illustrere sammenhængen mellem et menneskes semantiske netværk af begreber og teorien om aktiverbare semantiske strukturer – schemas – med en metafor fra matematikkens verden.

Hvis vi betragter begreberne i et givet semantisk netværk som punkter i et tredimensionalt rum og forbindelserne mellem disse begreber som linier mellem punkterne, så kan vi tænke på de aktiverbare semantiske strukturer som snitflader gennem rummet. Nogle steder i rummet vil en snitflade indeholde mange punkter og linjer, svarende til at de domæner af det semantiske netværk der "rammes" af snittet, rummer mange rigt forbundne begreber, andre steder færre.

Også orienteringen af snitfladen spiller en rolle: Et snit gennem et givet punkt vil i visse retninger indeholde linier til mange andre punkter, i andre retninger måske slet ingen, svarende til at der godt kan være mange forbindelser fra et begreb til begrebsstrukturer fra et bestemt domæne, samtidig med at det samme begreb ingen forbindelser har til begreber fra andre domæner.

Hermed er også den sidste vigtige sammenhæng antydet: Der kan være mange – i princippet uendelig mange – forskellige snitflader gennem det samme punkt, svarende til at hvert begreb kan indgå i mange forskellige aktiverbare semantiske strukturer.

5.3 Neurovidenskabens bidrag

Såvidt en modelbaseret analytisk tilgang som indtil sidst i 1980'erne var den altdominerende. Før da var neurologiens bidrag til forståelsen af *raske* menneskers kognitive funktioner i det store og hele begrænset til at kunne udtale sig om hjernens helt overordnede struktur.

Vi har således tre hjerner[2]; "krybdyrhjernen", "pattedyrhjernen" og "neo-cortex". Krybdyrhjernen, eller hjernestammen, er en forlængelse af rygmarven, og er først og fremmest central i forbindelse med *aggression.* I pattedyrhjernen ligger først og fremmest evnen til at have *følelser*; evnen til at være tiltrukket/frastødt af nogen eller noget. Størrelsen af neo-cortex, eller hjernebarken, er det der afgør muligheden for intelligent adfærd, fx i form af kontrol med aggressioner og følelser. Det er således i forståelsen af neo-cortex' virkemåde og samspil med de to andre hjerner vi skal lede efter et bidrag til udforskningen af de kognitive funktioner.

Når der for ca. 15 år siden skete et gennembrud i forskningen heri med dannelsen af kognitiv neurovidenskab som forskningsfelt, hænger det sammen med udviklingen af en ny scannings-metode der har gjort det muligt at se "direkte ind i" den normale arbejdende hjerne; såkaldt *positron emmisions-tomografi* (PET) (se Gade (1997, p. 72ff.) og Law (1997)).

Der er to væsentlige ting at sige om neurovidenskabens bidrag til forståelsen af de kognitive processer. For det første at det stadig er begrænset hvad man kan sige om *processer* i hjernen, så længe man kun har statiske "før og efter-billeder" at vurdere det ud fra (hvilket er hvad PET-scanning kan levere), hvad neuropsykologerne selv er de første til at sige. For det andet at meget af det man rent faktisk kan sige, bekræfter de antagelser om hjernens funktionsmåde der er en central del af modellerne af begrebsdannelse. Jeg vil her kort omtale to sådanne forhold.

5.3.1 Den plastiske hjerne

Man opererer med forskellige niveauer at analysere hjernens funktioner på: Fra funktionelle systemer over repræsentationskort til neuroner, synapser og molekyler. Til forskellige psykologiske funktioner er forskellige niveauer mere relevante end andre. Ofte er det forskningsmæssigt interessante om analyser af en given psykologisk funktion på flere forskellige niveauer giver resultater der peger i samme retning.

Det der i relation til undervisning er den interessante "fællesnævner" ved neurovidenskabelige undersøgelser på flere af disse niveauer, er at hjernen – ligesom musklerne – tilpasser sig i forhold til en ydre belastning som

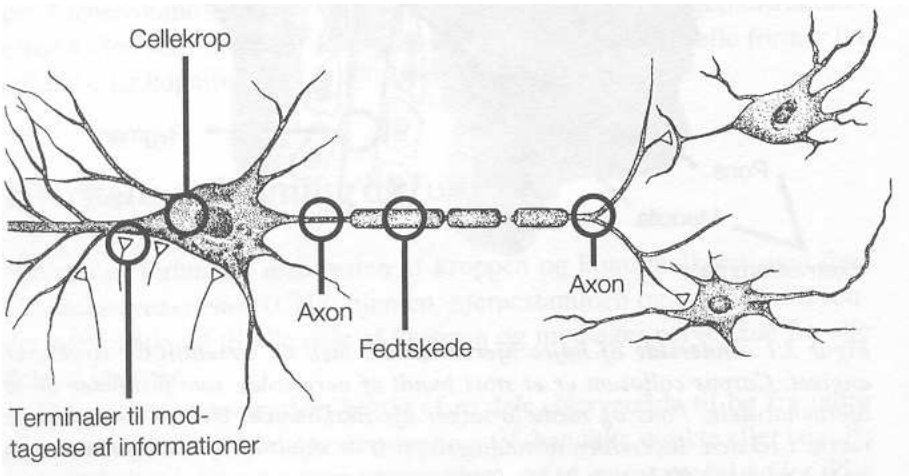
[2] Se Gade (1997, pp. 36-44) for en grundigere præsentation end den her givne.

indlæring. Man snakker i den forbindelse om at hjernen er *plastisk* (Mogensen; 1997).

Læring ændrer det neurale netværk

Den måde man bedst kan forstå den plastiske hjerne på, er ved at se på hvordan nervecellerne i hjernen er forbundet med hinanden, altså ved rent fysisk at se på det neurale netværk. Forskningen viser at dette netværk ændres såvel strukturelt som funktionelt i forbindelse med indlæring.

Det centrale at forstå her er selve "ledningsnettet"; nervecellerne og synapserne. Under hver kvadratmillimeter af hjernebarkens overflade er der ca. 100 000 nerveceller i et kompliceret netværk af indbyrdes forbindelser; såkaldte synapser. Hver nervecelle er forbundet til ca. 10 000 andre på denne måde, jf. figur 5.2.



Figur 5.2 Skematisk tegning af typisk nervecelle med cellekrop og nervetråde. Der er mange korte nervetråde til modtagelse af informationer fra andre nerveceller og én lang celleudløber, et såkaldt axon, til afsendelse af informationer i form af nerveimpulser. Axonet forgrener sig før det danner kontakt til andre nerveceller. Kontaktpunkter – synapser – er angivet med trekanter. Til højre er vist to modtager-nerveceller af en anden type. Fra Gade (1997, p. 38).

Ved brug af nervecellerne dannes synapser, således at der etableres særlig effektive veje imellem nerveceller der ofte er i spil sammen, og således at hver nervecelle forbindes med bestemte andre ved bestemte former for hjernearbejde (Mogensen; 1997). Det bekræfter modellernes antagelse om, at forskellige former for viden – i modellerne repræsenteret ved forskellige sanseerfaringer – danner relationer ved at man gennemfører processer hvor der trækkes på alle disse former for viden.

Bestemte dele af hjernen ændrer størrelse

På et mere overordnet niveau end de enkelte nerveceller har man konstateret, at de områder af hjernen som modtager sanseindtryk, er organiseret som en slags "kort" over kroppen eller omverdenen; såkaldte *repræsentationskort* (Gade; 1997, pp. 47-53).

Man har længe vidst at disse "kort" var foranderlige i et barns første leveår, men indtil for få år siden troede man at de hos voksne mennesker var faste og uforanderlige. Nye forsøgsresultater ved hjælp af PET-scanning har imidlertid anfægtet denne antagelse, så man nu regner med at indlæring af en motorisk færdighed medfører, at en hjernedel af speciel betydning for denne færdighed direkte vokser. Ved intensiv træning af aber har man over nogle få uger målt størrelsesændringer på helt op til én centimeter.

Hvis resultater som disse kan overføres fra indøvelse af motoriske færdigheder til begrebsdannelse, kan det ses som en bekræftelse af den hierarkiske models antagelse om at der faktisk "tilføjes" hjernen noget i forbindelse med begrebsdannelse.

5.3.2 Sammenfatning

Neuropsykologen Jesper Mogensen var med sit foredrag på konferencen "Hjerne og læring" (se Haderup et al.; 1997) den der gjorde, at jeg fik øjnene op for neurovidenskaben som en væsentlig del af kognitiv psykologi. Han får også lov til at sammenfatte neurovidenskabens bidrag til forståelsen af de kognitive processer, idet han både stiller og besvarer det spørgsmål der gør, at jeg tror der er væsentlige bidrag til forståelsen i vente fra den kant:

> "Samlet synes de omtalte forskningsresultater [som refereret i dette afsnit] at pege overbevisende på en positiv besvarelse af spørgsmålet : 'Sker der i forbindelse med informationstilegnelse og problemløsning en ændring af hjernens synapse-forbindelser?'. Det lader altså til, at selv den voksne hjerne – samt naturligvis barne-hjernen – er i besiddelse af en 'brugsrelateret' plasticitet. Denne plasticitet indebærer, at hjernens netværk i forbindelse med problemløsning, informationstilegnelse osv. (inklusive enhver form for oplevelse som senere vil kunne genkaldes og altså har været 'lagret') gennemgår en større eller mindre synapse-omstrukturering. Hvilke hjerneområder, der rummer de synaptiske ændringer (samt formentlig hvilke former for ændringer der er tale om), er primært et produkt af de 'psykologiske parametre', der karakteriserer den pågældende problemløsningssituation, oplevelse osv." (Mogensen; 1997, p. 20)

5.4 Forståelse, læring, hukommelse og genkaldelse

Ingen af modellerne om hierarkisk begrebsdannelse og semantisk distance skal opfattes som et forsøg på en direkte *beskrivelse* af hjernens opbygning og funktionsmåde. Der er tale om analytiske modeller, hvis styrke primært ligger i at bidrage til at planlægge, samordne og analysere empirisk forskning. På denne vis bidrager modellerne til forsøget på at *forstå* sammenhænge mellem de kognitive processer og forskellige former for "vidensmæssige input", hvilket jeg allerede har givet eksempler på, og i dette kapitel vil diskutere mere indgående.

At de resultater neurovidenskaben specielt indenfor det sidste årti er kommet med, på mange områder peger i retning af, at hjernens måde at repræsentere ny viden på tilsyneladende ikke ligger så fjernt fra en mere kompleks variant af modellernes fremstilling, gør selvfølgelig blot analyser foretaget på basis af modellerne endnu mere interessante.

Jeg vil i det følgende omtale fire centrale kognitive funktioner som naturligt falder i to dele: Dels forståelse og læring, dels hukommelse og genkaldelse.

5.4.1 Relationel og instrumentel forståelse og læring

At forstå noget betyder at assimilere det i forhold til en passende aktiverbar semantisk struktur. Det forklarer det subjektive ved forståelse, og understreger at forståelse ikke er "alt-eller-intet". Den førnævnte følelse af at vide hvordan det føles at have forstået noget kan nu også forklares: Forståelse af et nyt begreb betyder at man er i stand til at se begrebet som en meningsfuld del af forskellige situationer (Skemp; 1986/1971, p. 43f).

Hvis et begreb er assimileret i mange forskellige aktiverbare semantiske strukturer vil man kunne tilskrive det mening i tilsvarende mange situationer. Med et navn lånt fra grafteori, kemi og sprogvidenskab kan man "gradbøje" en givet persons forståelse af et givet begreb ved at tale om hvilken *valens* dette begreb har for vedkommende, forstået som hvor mange aktiverbare semantiske strukturer begrebet er konstruktivt assimileret i.

Denne form for forståelse vil jeg med et begreb fra Skemp (1978) referere til som *relationel forståelse* med direkte reference til schema-begrebet, og processen der fører hertil vil jeg tilsvarende betegne *relationel læring*. Når det er nødvendigt at tilføje ordet "relationel" er det for at kunne skelne operationer med eksterne objekter (symboler, fysisk eksisterende genstande osv.) baseret på en sådan begrebsforståelse fra samme operationer gennemført uden at objekternes interne repræsentationer er del af en aktiveret semantisk struktur. Denne form for handlen vil jeg tage som udtryk for *instrumentel* forståelse og parallelt hermed tale om *instrumentel læring*, hvilket altså afspejler en slags "rules without reasons" (Ibid., p. 9). Man "gør bare noget" uden at det sker som en del af en større sammenhæng.

Eksempelvis vil løsningen af en ligning baseret på opskrifter som "saml alle ens led på hver side af lighedstegnet ved at skifte fortegn på leddet når det flyttes" være udtryk for en instrumentel forståelse af "ligning" som begreb.

5.4.2 Hukommelse og genkaldelse

Prøv at se fem sekunder på hver af følgende to rækker af bogstaver, dæk så papiret til, og prøv at reproducere rækkerne:

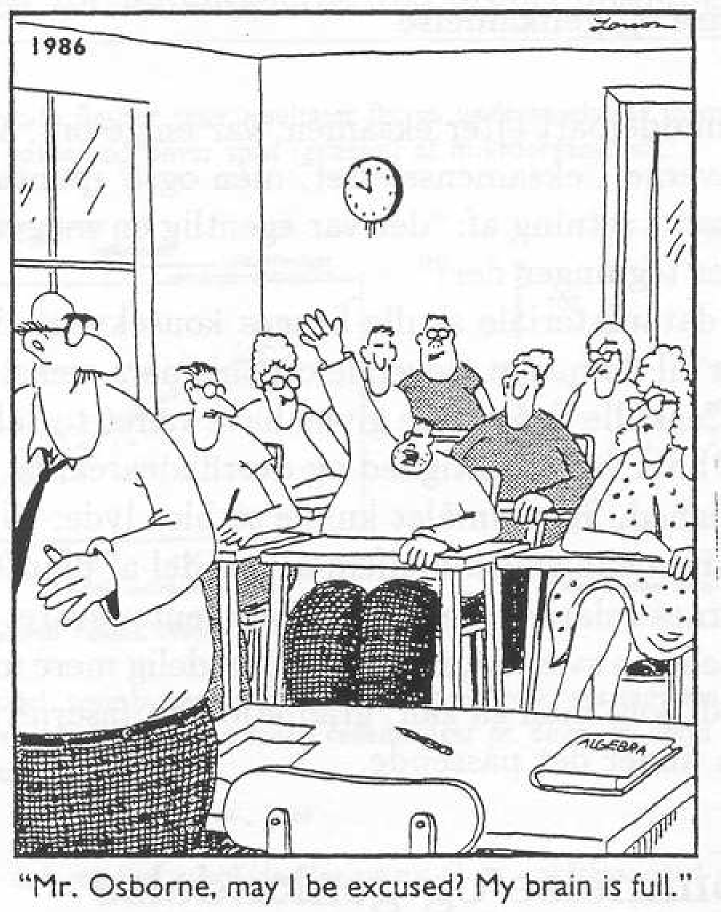
$$CLNVODHLIW$$

$$RELATIONERMELLEMENHEDERNE$$

Hvilken af rækkerne var nemmest at huske? For alle normale voksne danskere vil det være den sidste, selv om den indeholder dobbelt så mange bogstaver som den øverste række. Det skyldes vores tidligere omtalte evne til at klassificere informationer i meningsbærende enheder, som altså udover at være et skridt på vejen mod begrebsdannelse også gør at vi kan huske mange enkeltinformationer ved at "klumpe" dem til et sammenhængende hele (Hiebert & Carpenter; 1992, p. 75).

Når vi husker den sidste række af bogstaver langt nemmere end den øverste skyldes det, at øverste række indeholder ti enheder der skal huskes separat, mens man i nederste række kan nøjes med at huske de tre enheder "relationer", "mellem" og "enhederne". Det er den relationelle forståelse af de enkelte bogstaver i hvert ord der gør forskellen. Jo højere orden de begreber som symbolerne repræsenterer er, jo større er den mængde sanseerfaring der kan arbejdes med simultant, fordi begreber af høj orden trækker lange "kæder" af underordnede begreber med sig (Skemp; 1986/1971, p. 29). Der er altså ifølge modellen om hierarkiske begrebsstrukturer en direkte kobling mellem evnen til begrebsdannelse og effektiv hukommelse.

Når vi skal *genkalde* en erindring er det afgørende ikke så meget hvor mange underordnede begreber der "trækkes med", men antallet af relationer – valensen – det givne begreb indgår i. Et rigt forgrenet netværk giver mulighed for at mange andre begreber vil kunne fungere som "cues" i forbindelse med genkaldelse af et givet begreb. Hver elaborering danner en ny "sti" til erindringen.



Figur 5.3 *Far Out.* Af Gary Larson.

Herudover vil en bestemt kontekst ofte skabe cues til de aktiviteter der finder sted i denne kontekst, hvorfor de huskes bedre hvis en eventuel gentagelse finder sted i samme kontekst (Gade; 1997, p. 227ff). I forhold til at lære at anvende matematiske begreber indenfor ekstra-matematiske domæner betyder det, at man er nødt til rent faktisk at arbejde inden for disse ekstra-matematiske domæner for at de matematiske begreber assimileres heri.

5.4.3 Fordele og ulemper ved de to former for læring

Jeg kan opsummere de vigtigste pointer ved at stille relationel og instrumentel læring op overfor hinanden. Jeg mener således at relationel læring har tre *fordele* i forhold til instrumentel læring:

a) Relationel læring er hukommelsesmæssigt mere effektivt.

b) Relationel læring er selvforstærkende som metode.
c) Relationel læring konsoliderer forståelsen af de begreber der allerede tilhører den eksisterende semantiske struktur, altså en form for læringsmæssig "snebolds-effekt".

Relationel læring har to *ulemper* i forhold til instrumentel læring:

i) Hvis en opgave betragtes isoleret, vil relationel læring ofte være en betydeligt langsommere måde at lære at udføre opgaven på.
ii) Eksisterende semantiske strukturer virker selektivt i forhold til ny læring, ved at gøre det lettere at huske nye begreber der passer ind i en eksisterende semantisk struktur. Uhensigtsmæssige aktiverbare semantiske strukturer kan derfor være en lige så stor blokering for repræsentation af ny viden som hensigtsmæssige aktiverbare semantiske strukturer kan være en hjælp (Skemp; 1986/1971, pp. 38-43).

5.5 Potentialet ved anvendelser af matematik

Med beskrivelsen af at man kan forstå betydningen af et begreb i forhold til visse kontekster (hvilket er det der ligger i at have det integreret i visse aktiverbare semantiske strukturer), samtidig med at man kognitivt set er uforberedt på at inddrage begrebet i andre sammenhænge (nemlig sammenhænge der trækker på aktiverbare semantiske strukturer som begrebet ikke er assimileret i), kan jeg nu beskrive hvilke potentialer anvendelser af matematik i ekstra-matematiske sammenhænge har som elev-aktivitet, vurderet med et kognitions-psykologisk udgangspunkt.

Ved denne form for aktivitet består udfordringen kognitivt set i at skabe meningsfulde sammenhænge mellem en ekstra-matematisk kontekst og begreber fra en matematisk formalisme. Herved arbejder eleven aktivt med at assimilere disse begreber i semantiske strukturer der *i udgangspunktet ikke er matematiske.*

Hvis der er tale om matematikanvendelse indenfor et område som eleven har arbejdet med før og derfor ikke oplever problematisk, virker arbejdet forstærkende i forhold til allerede eksisterende relationer mellem de matematiske begreber i spil og aktiverbare semantiske strukturer fra elevens ekstra-matematiske erfaringsverden. Hvis det at forsøge meningsfuldt at relatere netop disse aktiverbare semantiske strukturer til begreber fra matematikkens verden er nyt for eleven, dvs. hvis det er et nyt område der forsøges bearbejdet ved hjælp af matematik, vil arbejdet medvirke til at udvikle elevens relationelle forståelse af de matematiske begreber i retning af ekstra-matematiske begrebsstrukturer.

Det er denne anvendelsesorientering i arbejdet med at øge valensen af de matematiske begreber i spil, der kognitivt set er potentialet ved at arbejde med anvendelser af matematik.

6 Diskussion af en række centrale begrebers betydning

I dette kapitel forsøger jeg at nuancere snakken i de forrige kapitler om "anvendelser af matematik". Hvad betyder det egentlig? Eller mere konstruktivt rettet: Hvordan er det frugtbart at snakke om "anvendelser af matematik" som en undervisningsaktivitet?

Min indgang til at diskutere dette spørgsmål er at forsøge at etablere en sprogbrug, som kan bruges til at karakterisere og typisere opgaver efter deres potentiale som element i en matematikundervisning med fokus på at lære eleverne at anvende matematisk viden og kunnen uden for matematikkens egen verden. Mere specifikt fokuserer jeg – som en naturlig konsekvens af den matematikfaglige analyse i kapitel 4 – på anvendelse af matematik i form af *analyse og konstruktion af matematiske modeller* (jf. omtalen på side 16), hvilket derfor naturligt er omdrejningspunkt for begrebsafklaringen. Først vil jeg dog præcisere hvad jeg mener – og ikke mener – når jeg snakker om at karakterisere "opgaver".

6.1 Opgave

I en matematikdidaktisk sammenhæng er begrebet "opgave" ikke helt uproblematisk at bringe i spil, hvilket jeg kan se to grunde til. Den første er at det er et begreb som mange med forbindelse til matematikundervisning bruger som om det var klart hvad der menes, uden at det på nogen måde er tilfældet. Der er ikke etableret nogen fælles forståelse af hvad det indebærer at snakke om "en opgave", hvilket sammen med en generel mangel på opmærksomhed herpå let kan gøre at man uden at vide det snakker forbi hinanden. Den anden grund er at man ved at bruge "opgave" som et konstruktivt begreb risikerer at blive associeret med en karakteristik af en pædagogisk praksis – "opgavediskursen" – som er blevet formuleret som en kritik af en matematikundervisningspraksis fattig på perspektiver og med meget stereotype forestillinger om hvad lærerens og elevernes respektive roller i undervisningen er (Mellin-Olsen; 1996; Skovsmose; 1999).

Jeg er enig i denne kritik, men jeg mener ikke den medfølgende implicitte udnævnelse af “opgave” som didaktisk skældsord er hensigtsmæssig, fordi den tager udgangspunkt i en meget snæver opfattelse af begrebet. I stedet vil jeg i de videre analyser bredt bruge “opgave” som betegnelse for *en eksplicit formuleret udfordring* til forskel fra udfordringer som ikke er eksplicit formulerede, og som derfor kun er en udfordring i kraft af nogens læsning af situationen.

6.1.1 “Rene” og anvendelsesorienterede matematiske opgaver

Med dette på plads kan jeg umiddelbart skelne mellem to typer af matematiske opgaver; *rene* matematiske opgaver og *anvendelsesorienterede* matematiske opgaver: Hvis det definerende spørgsmål tilhører et udsnit af den ekstra-matematiske verden og tillader visse matematiske begreber, metoder og resultater at blive involveret, taler jeg om en anvendelsesorienteret matematisk opgave. Hvis det definerende spørgsmål er helt indlejret i et matematisk univers taler jeg om en ren matematisk opgave (jf. Blum & Niss; 1991, p. 37).

Med “det definerende spørgsmål” mener jeg den del at opgaveformuleringen der gør, at der i det hele taget er tale om en opgave der sætter nogen i gang, og ikke blot en konstatering eller en kommentar. Derimod er det underordnet om opgaveformuleringen har form af et spørgsmål, en kommando eller noget helt tredje.

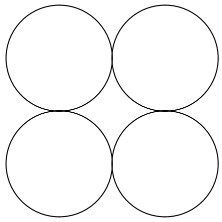
6.1.2 En nuancering er påkrævet

Ved at forestille sig forskellige opgaver brugt i en undervisningssammenhæng bliver det hurtigt klart, at en typisering som denne ikke i sig selv er tilstrækkeligt grundlag for et systematisk og velovervejet valg af opgavetyper. Det skyldes at der inden for hver af de to opgavetyper findes en variation hvad angår udfordringen til eleverne, der er langt større end variationen typerne imellem.

Eksempelvis er alle de tre opgaver på side 5f oplagt anvendelsesorienterede, mens opgaver som disse oplagt er “rene” matematikopgaver:

1. Fire cirkler er som skitseret på figuren her placeret symmetrisk så de uden at overlappe danner et lukket område mellem sig.

Hvad er arealet af dette område?



2. Bestem største- og mindsteværdi, monotoniforhold og eventuelle asymptoter for funktionen f givet ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 3x} \quad , \quad x \in [1;4]$$

Der er altså brug for at arbejde videre med den let gennemførlige typisering i anvendelsesorienterede og rene matematikopgaver. Det vil jeg i første omgang gøre ved at nuancere begrebet *anvendelsesorientering*, så det også er muligt at skelne de tre opgaver på side 5f fra hinanden med hensyn til hvad de hver især fordrer af eleverne. "Nøglen" i den forbindelse er at forklare hvad jeg lægger i begrebet "matematisk modellering", hvilket igen forudsætter at jeg har redegjort for min forståelse af begreberne "model" og "matematisk model".

6.2 Matematisk modellering

6.2.1 En model

Ordet "model" indgår i en række sammensatte ord som modelfly og modelbil som er velkendte for alle voksne mennesker. Selv små børn har en rimelig forestilling om, at deres legetøjsbiler er modeller af virkelige biltyper, og for togs vedkommende hedder legetøjsudgaven ligefrem et modeltog, en modeljernbane osv.. Lige så selvfølgelig ordet "model" således synes at indgå i almindelig sprogbrug, ligeså selvfølgeligt er det imidlertid at brugen kun sjældent ledsages af en bevidst refleksion over, hvad der egentlig ligger heri. Hvad er egentlig forskellen på at sige "modelfly" og bare "fly", og er det det samme som forskellen mellem "fotomodel" og bare "foto"?

En definition

Jeg definerer en model som triplet (A, M, f), hvor A er det område af den oplevede virkelighed som gøres til genstand for modelopstillingen og f er en afbildning der oversætter elementer fra A til elementer i den valgte repræsentant M.[1] Elementerne i M afhænger således af med hvilke midler repræsentationen foretages.

Det er altså ikke blot repræsentanten M der er modellen, men *triplet* (A, M, f). Fordelen ved at definere modeller på denne måde er først og fremmest at man får fremhævet at modellen er en *model af noget* (Niss; 1989). Endvidere mener jeg at man på en relativ enkel måde får skelnet mellem udgangspunktet, afbildningen og selve repræsentanten – en opsplitning jeg får glæde af i det efterfølgende.

Afbildning af en oplevet virkelighed

Det er afbildningen f der fastlægger, hvilke egenskaber fra det undersøgte område der skal repræsenteres og hvordan repræsentationen skal foregå. Jeg mener ikke det er fornuftigt at lægge begrænsninger på f. Derfor kan jeg altså sagtens forestille mig f som en identitet, hvor det valgte undersøgelsesområde repræsenteres ved sig selv uden nogen form for oversættelse. At det begrebsligt er fornuftigt understøttes af et eksempel, hvor den oplevede virkelighed i sig selv er en model: Afdrag og rentetilskrivning på et obligationslån i en kreditforening. Her skabes det specifikke udsnit af den oplevede virkelighed mange år frem i tiden af modellen for annuitetsgæld.

I praksis repræsenterer modeller dog ofte undersøgelsesområdet på en måde hvor f er udtryk for en *abstraktion* i betydningen "ser bort fra". Afhængigt af det konkrete behov der ligger til grund for opstillingen af modellen kan abstraktionens omfang selvfølgelig variere.

To eksempler

Landkort som modeller af et geografisk område er et godt eksempel på behovet for abstraktion. Landkort er modeller af virkelige geografiske forhold der repræsenteres i to dimensioner og i mindre målestoksforhold. Der findes imidlertid mange forskellige slags kort som adskiller sig fra hinanden ved de abstraktioner, der foretages ved f i de konkrete tilfælde. Planlægningen af en køretur mellem to byer langt fra hinanden kræver fx et kort hvor hovedvejene mellem forskellige byer er aftegnet og kan identificeres med vejskiltene, og hvor byerne blot behøver at være indtegnet som små cirkler. Altså et kort med et højt abstraktionsniveau. I andre sammenhænge kræves kort med betydeligt lavere abstraktionsniveau; orienteringsløbere bruger fx kort der ikke blot har et stort målestoksforhold, men også angiver højdekurver, vegetationsforhold osv.. Andre korttyper beskriver måske underjordisk rørføring i et afgrænset område.

Abstraktionsmulighederne er altså mangfoldige og må afhænge af det

[1] Jeg har ladet mig inspirere af definitionen i Niss (1989, pp. 28-29).

konkrete formål med modellen. Pointen er at der i alle ovennævnte tilfælde i vidt omfang er tale om *abstraktioner* i varierende omfang, og at vurderingen af om det er fornuftigt afhænger af hvad modellen skal bruges til.

Som et andet eksempel på det samme kan vi se på en model af en brandbil (jf. Jensen et al.; 2002, p. 10). Her kan både en vandslange, en politibil, en tegnet skitse og en legetøjsbrandbil være en velvalgt repræsentant, alt afhængig af hvilke karakteristika ved en brandbil modellen skal fremhæve som de centrale: Er det at den kan sprøjte med vand? At den kan køre med blinklys og sirene? Eller at den ligner en rigtig brandbil (hvordan man så end bærer sig ad med at afgøre hvad "ligner" vil sige) så meget som muligt, betinget af at man kan lege med repræsentanten i henholdsvis to og tre dimensioner?

Igen er pointen at man ikke en gang for alle kan afgøre hvilken model der er bedst, fordi det afhænger af formålet med modelopstillingen i en konkret situation.

6.2.2 En matematisk model

Når elementerne i repræsentanten M består af matematiske objekter, relationer, strukturer osv. betegner jeg modellen som en *matematisk model*.

Matematik indgår i et vist omfang i konstruktionen af flere modeller end de fleste umiddelbart gør sig klart. I eksemplet med brandbilen er der fx i flere af de omtalte repræsentationer beregnet eller anslået vinkler, længder osv. for bevidst at bevare visse dele (typisk er legetøjsmodeller proportionstro, hvilket har som konsekvens at vinklerne er bevaret) og ændre størrelse på andre (legetøjsmodeller er sjældent i naturlig størrelse, dvs. længdemålene er ændret). Og i eksemplet med forskellige typer kort er inddragelsen af matematik eksplicit, da informationen om hvilket målestoksforhold der er anvendt, er så vigtig, at brøkdelen (fx $1 : 100\,000$) angives direkte.

I disse tilfælde er matematikkens begreber og metoder imidlertid i spil i afbildningen f, og ikke i selve repræsentanten. Styrken ved den valgte modeldefinition består bl.a. i at den muliggør denne sondren.

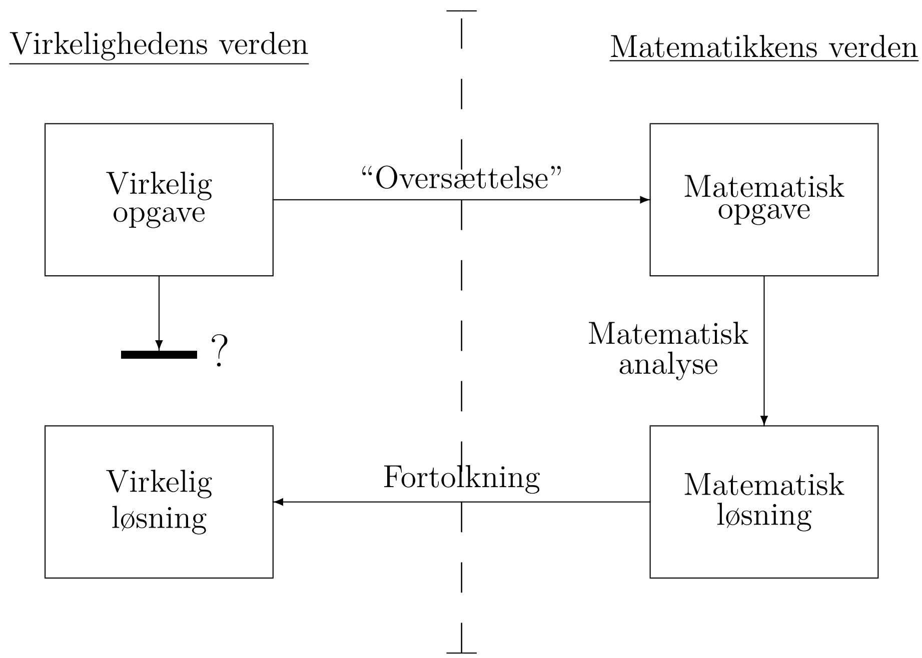
6.2.3 En første model af den matematiske modelleringsproces

I en undervisningsmæssig sammenhæng er det *processen* forbundet med matematisk modellering – som jeg vil bruge som betegnelse for det at konstruere og analysere matematiske modeller – der naturligt er i fokus.

Det skyldes at det er beherskelse af arbejdsprocessen og refleksioner i den forbindelse der kan – og som det turde være fremgået efter min mening også bør – læres, ikke selve modellen som *produkt*.

I sin simplest mulige form kan den matematiske modelleringsproces siges at bestå af tre delprocesser, jf. visualiseringen i figur 6.1: *Oversættelse* af den opgave fra virkelighedens verden[2] som initierer modelleringsprocessen til en tilsvarende opgave fra matematikkens verden; *analyse* af denne opgave ved hjælp af de værktøjer og tænkemåder som skridtet ind i matematikkens verden har givet adgang til; *fortolkning* af den matematiske løsning så den føres tilbage til udgangspunktet i den virkelige verden.

Figur 6.1 En model af den matematiske modelleringsproces.



Denne simple model er på sin vis en naturlig procesmæssig pendent til refleksioner i stil med de ovenstående over hvad en matematisk model er. Det er derfor ikke så overraskende at det er en model i stil med denne man arbejder ud fra, hvis ens overvejelser om matematiske modellers rolle

[2] Her forstået som den empirisk oplevede verden i modsætning til matematikkens rationelt genererede abstrakte univers.

i matematikundervisningen udspringer af erfaringer med anden form for arbejde med matematiske modeller snarere end af didaktiske refleksioner.

6.2.4 Matematisk modellering og demokratisk kompetence

I lyset af ønsket om bl.a. at bruge arbejdet med matematiske modeller i undervisningen som led i at udvikle deltagernes demokratiske kompetence er den simple model imidlertid problematisk. Det skyldes at denne fremstilling af den matematiske modelleringsproces i for høj grad simplificerer arbejdet forbundet med de indledende afgrænsninger og de afsluttende tolkninger og vurderinger, og i demokratisk øjemed er disse "ydre" dele af processen efter min opfattelse helt afgørende at arbejde med. Det er der flere grunde til, svarende til forskellige måder uddannelse i almindelighed kan – og efter min mening bør – fungere i demokratiets tjeneste.

Betydningen af de "ydre" dele af den matematiske modelleringsproces

En grund er at det især er i arbejdet med de "ydre" dele af modelleringsprocessen at der er behov for at nå til enighed og træffe nogle fælles beslutninger, hvis man er flere der samarbejder om at modellere. I forbindelse med "oversættelsen" handler det bl.a. om hvad det egentlig er man vil opnå ved at konstruere en matematisk model – hvad er motivationen? – og hvilke forhold det som en konsekvens heraf er centralt at få repræsenteret i modellen, og i den anden "ende" af processen ligger det i enhver fortolkning at man diskuterer hvilken mening det er rimeligt at tilskrive det fortolkede.

Hvis eleverne i en undervisningssammenhæng arbejder med de "ydre" dele af processen kan matematisk modellering derfor potentielt bidrage til *udviklingen af en demokratisk kultur i klasserummet*, som kan udvikle elevernes demokratiske attitude i almindelighed og i forhold til matematikanvendelser i særdeleshed. Fokus er her på matematisk modellerings potentielle bidrag til demokratisering af den uddannelsesmæssige proces, svarende til det Ole Skovsmose (1990a, p. 114ff) kalder *det pædagogiske argument* for at matematikundervisningen kan og bør bidrage til demokratisering af eleverne.

De to andre grunde jeg vil nævne til at de "ydre" dele af den matematiske modelleringsproces i demokratisk øjemed er afgørende at arbejde med, er instanser af det Skovsmose (1990a, p. 110ff) kalder *det sociale argument for demokratisering*, hvor fokus er på undervisningens indhold. Den ene instans handler om selv at kunne *udføre matematisk modellering*. I den forbindelse kan den simple model komme til at virke som "falsk varedeklaration" ved at give det indtryk, at "oversættelsen" er en muligvis teknisk vanskelig, men ellers simpel proces som udelukkende består i at vælge hvad de forskellige elementer i modellen skal hedde på "matematiksprog", svarende til hvad jeg og mange andre betegner "matematisering". Herved får man ikke tydeliggjort de ovennævnte motiverende og systematiserende elementer i en matematisk modelleringsproces.

I forhold til ønsket om at udvikle demokratisk kompetence er samspillet mellem disse to elementer i den indledende fase af matematisk modellering – den teknisk "oversættende" og den motivbestemt systematiserende – vigtige at få sat fokus på (jf. Blomhøj & Jensen; 2003), ikke mindst fordi det åbner op for den vigtige erkendelse at matematisk modellering på trods af matematikfagets objektiverende status (jf. citatet på side 72) hviler på et normativt grundlag.

Den anden instans af det sociale argument for demokratisering handler om at kunne levere en *indsigtsfuld kritisk stillingtagen til egen og andres matematiske modellering*. Også i den forbindelse er den ovennævnte skelnen mellem forskellige elementer i "oversættelsen" central, men herudover er der i dette lys naturligt nok fokus på den afsluttende del af modelleringsprocessen, som i den ovenstående simple model blot blev benævnt "fortolkning". Umiddelbart vil det for de fleste nok lede tankerne hen på en fortolkning af resultatet af den matematiske analyse, hvilket da også er en central del af processen. Denne form for fortolkning retter sig mod de strukturelle forbindelser indenfor modellens univers, fx ved at undersøge sammenhængen (eller manglen på samme) mellem de matematiske resultater af modelkonstruktionen og den ekstra-matematiske opgave som initierede modelleringsprocessen, og er dermed en del af at undersøge det Ole Skovsmose (1988, p. 28) kalder en models *synkrone forbindelser* med omverdenen.

Der er imidlertid et andet element i en indsigtsfuld kritisk stillingtagen til matematisk modellering, som er afgørende at sætte fokus på i forhold til behovet for at udvikle Mündigkeit. Det drejer sig om det Ole Skovsmose (1988, 1990b) kalder *refleksiv viden*, og omtaler som en af flere forskellige former for viden i tilknytning til den matematiske modelleringsproces (frit oversat efter Skovsmose (1990b, p. 767)):

- Matematisk viden i sig selv.
- Teknologisk viden, som viden om hvordan en matematisk model bygges og bruges.
- Refleksiv viden, der har karakter af en metaviden om modellers natur, kriterier i forudsætningerne for modellerne og deres anvendelser, og vurdering af modeller [i deres helhed].

Denne opstilling opfatter jeg som et forsøg på at fastholde nødvendigheden af, at arbejdet med at overskride aktør-struktur dualismen (jf. side 80) også – og måske i særdeleshed – bør gælde forhold som umiddelbart opfattes som omfattet at en form for teknisk betinget neutralitet, hvilket der som tidligere nævnt (jf. side 72ff) er gode argumenter for gælder matematisk modellering.

6.2.5 Min model af den matematiske modelleringsproces

En af konklusionerne på denne analyse af forholdet mellem matematisk modellering og demokratisk kompetence er, at det er hensigtsmæssigt at arbejde med en mere kompleks model af den matematiske modelleringsproces, end den jeg har visualiseret i figur 6.1. Det gælder ikke mindst i analytiske sammenhænge, hvor den overbliksgivende simpelhed i figur 6.1 fungerer som skyklapper i forhold til vigtige dele af processen.

I den righoldige litteratur der findes om brugen af matematiske modeller i sammenhæng med matematikundervisning, inddeles modelleringsprocessen alle de steder jeg er stødt på, i en række delprocesser som essentielt peger på de samme aktiviteter at gennemføre. Den faseopdeling og det ordvalg som jeg har valgt at arbejde med (jf. Blomhøj & Jensen; 2003) og som har udgjort et værdifuldt analytisk redskab i dette projekt, er især inspireret af præsentationen i Blomhøj (1992a), Niss (1989) og Skovsmose (1990c), og er ligesom resten af dette afsnit en videreudvikling af fremstillingen i Gregersen & Jensen (1998, kap. 2).

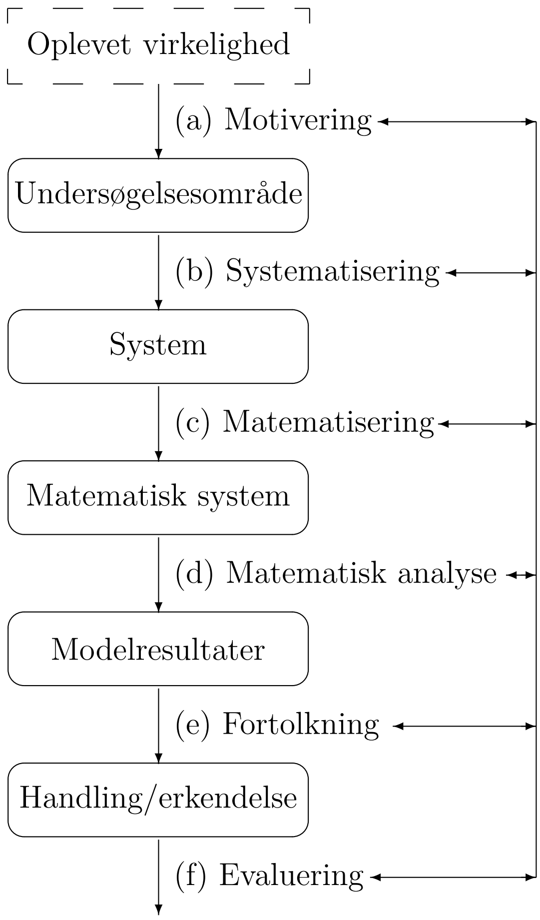
Modellen, som er et forsøg på at indfange de centrale træk ved såvel deskriptiv som preskriptiv matematisk modellering, er i overskriftsform illustreret i figur 6.2. Udover at fremstille de forskellige delprocesser på en måde der forhåbentlig hjælper med at bevare overblikket, har jeg her også forsøgt at "standse op" efter hver aktivitet, og vurdere hvilket niveau i modelkonstruktionen man som modellør befinder sig på. Sammenhængen mellem aktivitet og niveau er kommenteret i forbindelse med nedenstående uddybende bemærkninger til de enkelte delprocesser.

Uddybende bemærkninger til figur 6.2

ad Motivering: Ud fra modelbyggerens interesser og teoretiske forhåndsviden indkredses det hvad der motiverer ønsket om at konstruere en matematisk model, og det forsøges præciseret til en grad hvor det kan virke retningsgivende for resten af modelleringsprocessen. Ofte handler det om at formulere og forstå den opgave som modellen konstrueres med henblik på at udføre.

Herved fokuseres uundgåeligt på et *undersøgelsesområde* hvis afgrænsning er subjektiv og ofte ikke særlig skarp og bevidstgjort, men

Figur 6.2 En udbygget model af den matematiske modelleringsproces.



som ikke desto mindre tages som udgangspunkt for resten af modelkonstruktionen.

ad Systematisering: For at muliggøre en matematisk beskrivelse af det valgte undersøgelsesområde reduceres dets kompleksitet, enten bevidst ud fra antagelser om hvad der er mindre betydningsfuldt for den formulerede opgaves udførelse, eller ubevidst fordi modelbyggeren ikke er klar over betydningen af et eller andet. Modelbyggerens viden om det valgte undersøgelsesområde får derfor stor betydning for hvordan systematiseringen finder sted, og en ændring i denne viden vil således forventeligt virke tilbage på systematiseringen.

Den idealisering der ligger heri, er en del af "oversættelsen" fra undersøgelsesområdet over i et matematisk univers, hvorfor modellen og undersøgelsesområdet allerede er to adskilte størrelser før den matematiske formalisme kommer ind i billedet. Det er for at pointere dette at jeg i modellen vælger at "stoppe op" ved det *system*, der efterfølgende repræsenteres matematisk, jf. figur 6.2.

ad Matematisering: "Oversættelsen" videreføres, idet systemets objekter og relationer nu forsøges oversat til matematik. De herved fremkomne matematiske objekter og relationer bør – for at være repræsentant for systemet på en måde der er fornuftig i forhold til den bagvedliggende opgave – være ledsaget af antagelser om og egenskaber for disse objekter og relationer. Produktet af disse anstrengelser er et *matematisk system*.

De valg der uundgåeligt må træffes som en del af oversættelsen, er begrænset af modelbyggerens matematiske kompetence. Som følge heraf, eller som følge af en utilstrækkelig systematisering der ofte skyldes at modelbyggeren ikke tidligt i systematiseringsprocessen har gjort sig forestillinger om de matematiske muligheder (for ham/hende), vil matematiske vanskeligheder i beskrivelsen ofte føre til yderligere idealiseringer, der virker tilbage på systembeskrivelsen. Der er altså heller ikke her et entydigt forhold mellem de to niveauer "system" og "matematisk system", som sammen med matematiseringen danner det tripel som udgør den konstruerede matematiske model, jf. definitionen heraf på side 107.

ad Matematisk analyse: Der er i hvert fald to grunde til at man som modelbygger ofte vælger matematik som "modelsprog".

For det første tilbyder matematik en sproglig klarhed i fremstillingen som ofte er tillokkende. Et centralt element heri er den konsistens – modsigelsesfrihed – i fremstillingsformen som matematik tilbyder, fordi den får logiske brister i argumentationen til at fremstå tydeligere end i mindre formaliserede sprog. Man kan derfor tjekke et ikke-matematisk system og konklusioner afledt heraf for konsistens ved at undersøge om det kan "overleve" en formalisering. Denne fordel opnås til dels allerede ved at *opstille* det matematiske system.

For det andet tilbyder matematik veje til dragning af konklusioner. Her er det afgørende at man kan belyse den oprindelige opgave ved at *analysere* dens matematiske fremtrædelsesform; det matematiske system. En sådan analyse kan være baseret på algebra, infinitesimalregning, computersimulering osv., men målet vil i alle tilfælde være en række *modelresultater*.

ad Fortolkning: Disse modelresultater skal nu fortolkes for at se om de kan kvalificere reaktionen på den oprindelige opgave i form af *handling* og/eller øget *erkendelse*. Denne fortolkning har to aspekter:

En *intern* fortolkning der vurderer om det er rimeligt at konkludere noget som helst på basis af modelresultaterne, fx ved at undersøge hvor følsomme de er overfor små ændringer i de indgående parametre.

En *ekstern* fortolkning der "oversætter tilbage" fra modelresultater til udsagn om undersøgelsesområdet, og vurderer resultaterne på denne baggrund: Giver de mening i de sammenhænge de er en del af? Er de realistiske? Svarer de på det oprindelige spørgsmål? etc.

ad Evaluering: En modelleringsproces kan gennemføres med forskellige mål for øje. Det kan være en måde at løse et foreliggende problem på, det kan være et middel til at klare en rutinemæssig opgave lettere eller hurtigere end hvis andre midler tages i brug, eller motivationen kan bestå i noget helt tredje. I alle tilfælde vil det være fornuftigt at sammenholde det gennemførte modelleringsarbejde med det der motiverede det, for på denne måde at evaluere modelbygningen *i sig selv*: Gjorde jeg det fornuftigt? Kan jeg på nogen måde forbedre modellen? Hvad er modellens gyldighedsområde; under hvilke omstændigheder er den brugbar, og under hvilke omstændigheder er den ikke? Har matematisk modelbygning vist sig at være en fornuftig måde at arbejde med den formulerede opgave på?

At stille og forsøge at besvare spørgsmål som disse kræver – udover den førnævnte matematiske kompetence og viden om det valgte virkelighedsudsnit – viden om processen forbundet med at bygge en matematisk model som den jeg forsøger at formidle her. Ofte vil det være nødvendigt at bygge en ny eller modificeret model, og således gå skridt (a)-(f) igennem igen.

En definition

Jeg vil reservere begrebet *matematisk modellering* til udelukkende at henvise til en proces hvor alle faserne (a)-(f) gennemgås med henblik på at konstruere og analysere en matematisk model. Ikke nødvendigvis sekventielt fra start til slut; som antydet vil det ofte være fornuftigt at gå "baglæns" og gentage nogle af faserne eller at gå igennem hele processen flere gange, hvilket pilene til højre i figur 6.2 er tænkt som en indikation af. Og ikke nødvendigvis på en bevidst og kontrolleret måde; som med så mange andre ting vil man sikkert gennemløbe de enkelte faser mere og mere instinktivt, jo bedre man er til at modellere.

Opsplitningen i faser har et deskriptivt udgangspunkt: Når matematik anvendes i forbindelse med en ekstra-matematisk opgave er der *uundgåeligt* tale om implicit eller eksplicit gennemløb af en modelleringsproces der har en fælles struktur, som jeg altså opdeler i faserne (a)-(f).

Fremstillingen her skal med andre ord ikke læses som en kogebogsopskrift, men som et bud på en abstrakt opdeling af de processer der mere eller mindre bevidst er i spil ved konstruktionen af en matematisk model. Men for at jeg vil kalde en aktivitet *matematisk modellering* skal man på den ene eller anden måde arbejde med alle de nævnte aspekter.

Om hvad der ikke betones med denne fremstilling

Som med enhver anden model er der visse aspekter af den matematiske modelleringsproces der med min fremstilling implicit fremhæves som særligt væsentlige, hvilket jeg forsøger at være så bevidst og artikuleret om som muligt, og andre aspekter der implicit udnævnes til at være mindre væsentlige, af den simple grund at de ikke har en selvstændig repræsentant i modellen.

Et væsentligt eksempel på det sidste er forhold som er interessante i kraft af undersøgelsesområdets karakter. Mest oplagt kan det dreje sig om matematisk modellering med afsæt i en problemstilling der kan angribes på en måde som er eksemplarisk for et bestemt fagområde. I sådanne tilfælde vil det fagligt set eksemplariske i arbejdsprocessen naturligt udgøre en væsentlig del af det man som fagperson ønsker at pege på ved at at modellere den matematiske modelleringsproces, som Jens Dolin (2003, p. 249ff) eksempelvis gør det i en fysikfaglig sammenhæng ved at indskrive "fysikalisering" som delproces.

Et andet eksempel er at man kan ønske at fremhæve bestemte træk ved den matematiske analyse, og derfor vælger at give disse træk en selvstændig repræsentant i modeller af den matematiske modelleringsproces. Det kan eksempelvis som foreslået af Inge Henningsen (2001, p. 27ff) dreje sig om at fremhæve "dataindsamling" som selvstændig del af en modelleringsproces hvor den "tekniske kerne" er en statistisk analyse.

At man således med god ret kan kritisere min fremstilling af den matematiske modelleringsproces for at mangle nogle forhold som i en given type af situationer og med et givet mål for øje er centrale at få med, ser jeg hverken som en generel anke mod eller ros af min fremstilling. Det er blot et godt eksempel på det konstruktive i at betragte modellering i almindelighed og matematisk modellering i særdeleshed som en kommunikationsform hvis store styrke netop ligger i, at man tvinges til at blotlægge hvad der i situationen anses for væsentligt og uvæsentligt. Herved får man også en påmindelse om at modellering som enhver anden kommunikationsform hviler på et normativt grundlag, jf. omtalen på side 112. Det er centralt i forhold til en analyse af både potentialer ved og tilrettelæggelse af matematisk modellering som didaktisk aktivitet, fordi effektiviteten af matematisk modellering som kommunikationsform selvsagt afhænger af den ledsagende artikulering eller mangel på samme. Det vender jeg tilbage til i kapitel 9.

6.2.6 Anvendelsesorienterede matematiske opgaver – en nuancering

Lad mig nu igen vende mig mod den type af opgaver som jeg – ved at kigge på "det definerende spørgsmål" – kan karakterisere som anvendelsesorienterede, jf. omtalen i afsnit 6.1.1. I de efterfølgende bemærkninger argumenterede jeg for, at der er behov for at nuancere denne karakteristik for at den bliver nyttig som baggrund for udvælgelse af opgaver i en undervisningssammenhæng.

Modellen af modelleringsprocessen som redskab

Opdelingen af den matematiske modelleringsproces i seks faser (jf. figur 6.2) er bl.a. tænkt som redskab til brug for en sådan nuancering. Jeg kan karakterisere hver enkelt opgave efter hvilke af faserne i modelleringsprocessen det overlades til den der skal udføre opgaven (eleven) at gennemføre og hvilke der allerede er gennemført af opgavestilleren (læreren/lærebogsforfatteren/eksamensopgave-udvalget).

At en sådan analyse er mulig skyldes at man kan overbevise sig om, at *nogen* nødvendigvis bevidst eller ubevidst skal gennemføre i hvert fald faserne (a)-(e) i den matematiske modelleringsproces, hvis en anvendelsesorienteret opgave skal løses med matematikkens hjælp: Nogen skal nødvendigvis foretage de valg der ligger i *motiveringen* og *systematiseringen*; nogen skal *matematisere* det fremkomne system, da jeg omhyggeligt har udskilt de rene matematiske opgaver hvor denne del af processen er sammenfaldende med systematiseringen; hvis formålet med modelleringen ikke alene er at udnytte matematikkens klare sproglige udtryksform skal nogen forsøge at opnå nogle modelresultater ved at gennemføre en *matematisk analyse*; og da disse matematiske resultater – igen qua min afgrænsning – ikke i sig selv udgør en kvalificeret reaktion på det definerende spørgsmål, skal nogen afgøre om det er muligt at opnå ved at *fortolke* disse resultater.

De tre anvendelsesorienterede opgaver på side 5f er bl.a. formuleret med tanke på at illustrere en sådan "opgavedissekerende" brug af modellen af den matematiske modelleringsproces. Således er *opgave 1a* formuleret med tanke på at være et eksemplarisk oplæg til at gennemføre fuldbyrdet matematisk modellering. Det eksemplariske består i at oplægget er formuleret så åbent som jeg har fundet det muligt, givet at der er tale om en opgave i betydningen "en eksplicit formuleret udfordring".

I *opgave 1b* er et bud på en motivering og systematisering af problemstillingen i opgave 1a gennemført. Det der direkte spørges til er matematisering af det etablerede system af variable og relationer imellem dem. Opgaven er et eksempel på, at det er selve det at bruge matematik som repræsentationsform der gør modellen værdifuld, så nogen egentlig matematisk analyse lægges der ikke op til. Derimod er det en integreret del af udfordringen at vende tilbage til udgangspunktet ved at fortolke det opstillede matematiske udtryk.

Opgave 1c er formuleret så motivering, systematisering og matematisering er gennemført, så den udfordring der står tilbage, er forskellige former for analyse af de opstillede matematiske udtryk, samt afslutning af en påbegyndt fortolkning af disse udtryk.

Ved at gennemføre processerne (a)-(e) er man kommet frem til *én mulig* reaktion på den initierende udfordring (i form af handling og/eller erkendelse). Snævert betragtet er fase (f); *evaluering*, derfor ikke nødvendig for at man kan sige at opgaver som disse er udført. Hvorvidt denne mere introeller retrospektive del af modelleringsprocessen betragtes som en naturlig del af arbejdet med opgaver som disse, er derfor et spørgsmål om hvilken "opdragelse" af eleverne man som underviser eller uddannelsespolitiker ønsker arbejdet med opgaverne skal bidrage til. Med andre ord; hvad er det *overordnede* formål med at inddrage anvendelsesorienterede matematiske opgaver i matematikundervisningen?

At jeg i lyset af ønsket om at bidrage til udviklingen af demokratisk kompetence anser evalueringsdelen af den matematiske modelleringsproces som helt essentiel kommer formodentlig ikke som den store overraskelse, men det vender jeg tilbage til i kapitel 9.

Anvendelsesorientering – et spektrum

Dissekeringen af de tre opgaver er tænkt som en illustration af, at betegnelsen "anvendelsesorienterede matematiske opgaver" med fordel kan – og bør – opfattes som dækkende over et *spektrum* af opgaver, der spænder lige fra rutineprægede opgaver i at gennemføre en enkelt af faserne i den matematiske modelleringsproces til opgaver som sender modtageren ud i "fuldbyrdet" matematisk modellering.

Med min sprogbrug er matematiske modelleringsopgaver således et yderpunkt i det jeg vil betegne en opgaves *faglige forankring*. Det vender jeg tilbage til i kapitel 9.

6.3 Matematisk problemløsning

Der er to forhold som i kombination gør, at "matematisk problemløsning" er et af de begreber jeg mener det er centralt at få præciseret i forbindelse med det her beskrevne projekt. Det ene forhold er, at matematisk problemløsning ofte er en af de centrale ingredienser i at kunne genemføre en matematisk modelleringsproces, ikke mindst i forbindelse med delprocesserne matematisering og matematisk analyse, jf. figur 6.2 på side 114. Det vender jeg tilbage til i kapitel 10.

Det andet forhold er, at valget af kognitions-psykologi som et af de to perspektiver i del II placerer problemløsning som et centralt begreb i en didaktisk analyse. Det er ingen tilfældighed at problemløsning optræder som emne i enhver grundbog i kognitiv psykologi (se fx Best; 1999, som er den jeg selv er blevet undervist efter), mens jeg i de mange sådanne grundbøger jeg har kigget i endnu ikke er stødt på omtale af modellering som aktivitet. Kognitionspsykologien bliver således relevant for arbejdet med matematisk modellering i kraft af det klare lys dette perspektiv kaster på problemløsning.[3]

6.3.1 Et problem

Ved "et problem" forstår jeg *en situation der involverer en række metodeåbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene* (jf. Blum & Niss; 1991, p. 37).

Hverdagsbetydningen af "et problem" er i god overensstemmelse med denne definition; man står overfor et problem når man er havnet i en situation, hvor man for at komme videre skal finde på et eller andet der ikke lige springer i øjnene. På trods af at begrebsforståelsen altså ikke er særlig konstrueret og at den nærmere definition af et problem ikke er noget nyt[4], er der tilsyneladende uklarhed om begrebets betydning i en

[3] Resten af dette afsnit er en sammenskrivning af redigerede citater fra Gregersen & Jensen (1998, kap. 2).

[4] Pioneren i arbejdet med problemløsning i relation til matematikundervisning, George Polya, kom for mere end 40 år siden med følgende definition, som rummer de samme grundelementer som den definition jeg bruger:

> "In general, a desire may or may not lead to a problem. If the desire brings to my mind immediately, without any difficulty, some obvious action that is likely to attain the desired object, there is no problem. If, however, no such action occurs to me, there is a problem. Thus, to have a problem means: *to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim.*" (Polya; 1962,

matematikundervisnings-kontekst; nogle taler om problemløsning når man regner opgaver, andre taler om opgaveregning når man løser et problem stillet af opgaven. Det motiverer en præcisering af hvordan jeg opfatter forholdet mellem en opgave og et problem.

Opgave, øvelse og problem

En opgave har en *objektiv* karakter, forstået således at hvorvidt der er tale om en opgave eller ej ikke er afhængigt af, hvem der stiller den eller modtager den. Om udførelsen af opgaven giver anledning til et problem kommer an på opgavemodtageren. Et problem har nemlig en *subjektiv* karakter, hvilket ses eksplicit i ovenstående definition på et problem ("udfordrer en eller anden"). Derfor medfører eksistensen af et problem også eksistensen af en eller anden person det er et problem for.

En opgave kan for eksempel være "slå græsset" eller "find rødderne i andengradsligningen $2\,x^2 + 2\,x - 4 = 0$". At skulle udføre et sådant stykke arbejde kan selvfølgelig sagtens give anledning til forskellige problemer. For eksempel kan græsslåmaskinen være gået i stykker eller man kan have mistet sin formelsamling eller man kan være på et for lavt uddannelses- eller erfaringsniveau (for et 8-årigt barn giver begge opgaver sandsynligvis anledning til problemer). Man kan altså stille *alle* en opgave, men ikke vide sig sikker på for hvem det er et problem.

For at kunne skelne klart mellem begreberne taler jeg om en *øvelse*, hvis det med rimelighed kan antages at en opgave ikke er eller vil føre til et problem for modtageren. I de tilfælde hvor løsningen af opgaven giver anledning til et problem for modtageren, vil jeg benytte termen *problem* i stedet for opgave. Opgave bliver derfor foreningsmængden af begreberne øvelse og problem, og jeg benytter termen opgave når modtagerens formåen ikke kan afgøres eller når opgavetypiseringen i øvelser og problemer ikke er i fokus.

Denne begrebsbrug gør det muligt at karakterisere opgaver efter hvordan man forventer, håber eller som opgavesnedker har planlagt de vil virke på en konkret modtagergruppe. Eksempelvis er de to "rene" matematikopgaver på side 106 formuleret på en måde, så jeg tror de fleste tilrettelæggere af gymnasial matematikundervisning håber opgave 2 vil være en øvelse for elever som har deltaget i den obligatoriske matematikundervisning[5], mens opgave 1 forventeligt vil forblive et problem. På samme vis kan man diko-

p. 117)

[5] For enhver grundskoleelev som i det hele taget er i stand til af forstå opgaven vil den givetvis være et problem, mens enhver kandidat i matematik vil opleve den som en øvelse.

tomisere de tre opgaver på side 5f, som med underspørgsmål reélt er syv opgaver, men den opgave vil jeg overlade til dig som energisk læser.

6.3.2 Problemløsning og brugen af matematik

Problemløsning betegner simpelthen den proces hvorigennem man forsøger at løse et problem.

Det helt centrale ved denne proces er at den – som "komplementærmængden" til arbejde med øvelser – er karakteriseret ved nødvendigheden af bevidste eller ubevidste *metodemæssige overvejelser*. Hvad det nærmere kan siges at bestå i i forhold til matematisk problemløsning, og hvilke udfordringer det i øvrigt giver at skulle gennemføre en problemløsningsproces, vender jeg tilbage til i kapitel 10. Her skal jeg kun bruge påpegningen vedrørende det metodemæssige til en begrebsmæssig præcisering:

For at tale om *matematisk problemløsning* vil jeg kræve, at *de metodemæssige overvejelser* involverer visse matematiske begreber, metoder og resultater (jf. definitionen af rene og anvendelsesorienterede matematiske opgaver på side 106). Det er med andre ord ikke matematisk problemløsning, hvis matematikken først kommer på banen på det tidspunkt i processen hvor det i givet fald er lykkedes en at reducere problemet til en rutinemæssig øvelse. En vigtig undervisningsmæssig konsekvens heraf er, at man ikke kan nøjes med en simpel iagttagelse af om der optræder matematik i besvarelsen af en opgave, for at kunne afgøre om der har været tale om matematisk problemløsning. Man er nødt til at gå dybere ned i besvarelsen og arbejdsprocessen bag den for at afgøre karakteren af den måde, matematik er brugt på.

6.3.3 Kognitiv psykologi og problemløsning

Med præciseringen af begreberne øvelse, problem og problemløsning kan jeg nu vende tilbage til det klare lys som jeg har påstået den kognitionspsykologiske analyse i kapitel 5 kaster på disse begreber. I dette perspektiv er der er en klar fortolkning af, hvornår en opgave opleves som en umiddelbart tilgængelig øvelse og hvornår den opleves problematisk: Det afhænger af om de begreber som arbejdet med opgaven fordrer aktiveret, er del af en eksisterende aktiverbar semantisk struktur eller ej.

Set med udgangspunkt i typen af aktivitet fremkommer den didaktisk set mere interessante pointe, at problemløsning og arbejde med øvelser kan bruges til at udvikle hjernen på to fundamentalt forskellige måder:

Arbejde med øvelser medvirker til at *forstærke allerede eksisterende* neurale forbindelser indenfor en eller flere aktive semantiske strukturer, og giver dermed en mere “driftsikker” *instrumentel eller relationel forståelse*, afhængigt af hvilken form for forståelse der eksisterer når arbejdet med øvelser igangsættes.

Problemløsning medvirker til at *danne nye* neurale forbindelser mellem begreber og aktiverbare semantiske strukturer, der ikke i forvejen indeholder disse begreber, og øger dermed valensen af den *relationelle forståelse*.

6.4 Kompetence

I en didaktisk sammenhæng er hverken modellering eller problemløsning rasende interessante begreber, isoleret set. Det interessante er hvad man som medansvarlig for tilrettelæggelse og afvikling af undervisning forsøger at få eleverne til at forstå, vide, kunne, mene etc. i relation til modellering og problemløsning.

I den sammenhæng er begrebet “kompetence” det helt centrale i dette projekt. Dette begreb vil jeg – med en formulering der er inspireret af fremstillingen i Jørgensen (1999) og ikke ligger langt fra ordvalget i Niss & Jensen (2002, p. 43) – bruge som betegnelse for *nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation*.

Der er selvfølgelig på ingen måde tale om en kanonisk definition. Tværtimod har jeg i min egen tænkning om kompetencebegrebets betydning og i utallige fremlæggelser og diskussioner heraf gjort en dyd ud af at fastholde, at måden man bruger et så teoretisk svagt funderet begreb på må og skal være formet af en analyse af de funktioner som man mener begrebet potentielt kan tjene.

For mig handler det især om tre funktioner. For det første skal kompetence kunne *bidrage til didaktiske teoretiske diskussioner*, ved at tilbyde sig som et begreb der integrerer begreberne “viden” og “færdighed”, jf. kommentarerne herunder. For det andet skal kompetencebegrebet kunne fungere som *redskab for uddannelsespolitiske beslutningstagere på alle niveauer* (herunder lærere) ved at perspektivere diskussioner og strategibeslutninger om faglighed og undervisningsmål på en måde der modvirker pensumitis (Jensen; 1995), jf. omtalen af KOM-projektet i afsnit 4.6.2 (side 82ff). For det tredje skal kompetencebegrebet kunne bruges som *kommunikationsværktøj* i forbindelse med målsætnings- og tilrettelæggelsesdiskussioner mellem de forskellige deltagere i undervisningen, hvilket er hoveddagsordenen for kapitel 9.

6.4.1 Nogle karakteristiske træk

Begrebet kompetence bruges på dansk i to meget forskellige betydninger som man kunne kalde reél og formel kompetence. De to betydninger kan sammenfattes med ordene "ekspertise" henholdsvis "autorisation" (Niss; 1999b). Min bestræbelse handler om at uddybe hvad ekspertise vil sige, og har altså intet at gøre med en formel ret – autorisation – til at udføre bestemte handlinger eller bestride bestemte job, jf. ord som "beslutningskompetence" og "lærerkompetence". At have både ekspertise og autorisation indenfor et givet felt kan siges at være det der giver en person myndighed (ibid.), hvilket dog stadig gør det til et mere formelt begreb end det eksplicit personlighedsrettede begreb Mündigkeit (jf. omtalen på side 76).

I valget af ovenstående formulering af hvad kompetence vil sige ligger som nævnt bl.a. et ønske om at indfange en række karakteristiske træk ved kompetencebegrebet (Blomhøj & Jensen; 2003). For det første er kompetence et begreb *orienteret mod handling*. Ordet "handling" er her brugt i bred forstand, idet "parathed til at handle" også inkluderer bevidst at afstå fra at udføre en fysisk handling eller indirekte i sine handlinger at være vejledt af en bevidsthed om bestemte karakteristika ved en given situation. Handlinger behøver således ikke være fysiske – at beslutte sig for et "ja" eller et "nej" til euroen er også en handling. Men der er ingen kompetencer forbundet med at være umådeligt indsigtsfuld, hvis indsigten ikke kan omsættes til handling i denne brede betydning af ordet.

For det andet har alle kompetencer et *aktionsområde*, dvs. et domæne indenfor hvilket de kan aktiveres (jf. Niss & Jensen; 2002, s. 64f). Heri ligger ikke at en kompetence er kontekstuelt forbundet med anvendelsen af en bestemt metode til at udføre en given opgave. Hvis det var tilfældet ville et forsøg på at karakterisere generelle kompetencer ikke have nogen mening. Kompetencer er kun kontekstuelle i den forstand, at de er indrammet af de historiske, sociale, psykologiske osv. omstændigheder ved den "givne situation" (Wedege; 1999), jf. definitionen af kompetencebegrebet.

For det tredje er kompetence et *analytisk begreb* med en indbygget *dualitet mellem en subjektiv og en social/kulturel side*. Subjektiv fordi en kompetence altid er "nogens"; kompetencer eksisterer ikke i sig selv – det der eksisterer er kompetente mennesker (Fragniere; 1996, s. 47). Social/kulturel fordi oplevelsen af i hvilken grad en handling *lever op til udfordringerne i en given situation* altid (men ikke nødvendigvis udelukkende) sker relativt til de omgivelser, der tilskriver handlingen mening og legitimitet.

For det fjerde er kompetence et *normativt begreb* i kraft af, at vurderingen af hvilke udfordringer en given situation rummer, hviler på et normativt grundlag. Som analytisk begreb giver det kompetence et *kritisk potentiale* i forhold til gældende normer, i og med at dette grundlag kan hives frem i lyset og gøres til genstand for refleksion.

For det femte og sidste rummer kompetence et element af *personlig tilbøjelighed*. Hvis en person er i stand til at handle i forhold til en given udfordring men afstår fra at gøre det selv om "situationen kræver det", dvs. selv om normerne tilsiger at den givne udfordring presser sig på i situationen, eller hvis det kræver en opfordring eller kommando at få personen til at handle, er vedkommende ikke kompetent i situationen. Det er en del af det at være kompetent ikke at være for genert, tilbageholdende, selvudslettende etc., hvilket er det jeg forsøger at indfange med ordet "parathed" i definitionen af kompetencebegrebet.

6.4.2 Kompetence versus færdighed

Begrebet *færdighed* bruger jeg som betegnelse for *nogens evne til at udføre en given handling med utvetydige karakteristika*.

Ved at karakterisere begrebet sådan forsøger jeg at pege på to vigtige forskelle på det at have udviklet en kompetence og det at have erhvervet en færdighed. For det første er "færdighed" et *mindre komplekst begreb* at arbejde med i undervisningen, fordi *udførelsen* af den givne handling i sig selv udtrykker færdigheden, uanset hvad der ligger til grund for evnen hertil.

For det andet er "færdighed" et *mindre ambitiøst begreb* at arbejde med i undervisningen, fordi der er tale om at udføre en "given handling med utvetydige karakteristika". Herved ses der bort fra det meste af det der er indeholdt i det at have udviklet kompetence: Det at have fornemmelse for hvad "udfordringerne i en given situation" består i, det at afgøre hvilken form for reaktion der lever op til disse udfordringer, samt det at sætte sig selv i scene når reaktionen skal føres ud i livet, ofte ved bl.a. at drage nytte af en række erhvervede færdigheder. Det at have udviklet kompetence indbefatter altså ofte at have erhvervet en række færdigheder, men det er vigtigt at gøre sig klart at kompetence omfatter meget mere en blot summen af en række færdigheder.

Arbejdet som lærer kan bruges til at eksemplificere forskellen på de to begreber. En person med reél lærerkompetence mestrer en række færdigheder – dels de faglige som er på dagsordenen, men også ting som at kunne skrive læseligt og overskueligt på en tavle, at kunne betjene forskellige former for kommunikationsudstyr (fx. en overheadprojektor) osv. –, men selv nok så lang en liste med sådanne færdigheder kommer ikke i nærheden af at karakterisere hvad kompetencen rummer. En bedre måde at nærme sig en karakteristik er at beskrive de mest centrale delkompetencer. På overskriftsform kan et bud herpå fx. være læseplanskompetence, undervisningskompetence, læringsafdækningskompetence, evalueringskompetence, samarbejdskompetence og professionel udviklingskompetence (Niss & Jensen; 2002, kap. 6).

6.5 Matematisk modellerings- og problembehandlingskompetence

6.5.1 To definitioner

Som en naturlig kombination af forståelsen af begreberne "matematisk modellering" og "kompetence" bruger jeg – i forlængelse af fremstillingen i Niss & Jensen (jf. 2002, p. 52f) – matematisk modelleringskompetence som betegnelse for *nogens indsigtsfulde parathed til selv at gennemføre alle dele af en matematisk modelleringsproces og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.*

Ved at kombinere forståelsen af "matematisk problemløsning" og "kompetence" med et ønske om også at indfange det at *formulere* problemer (Ibid., p. 49f) kan jeg definere matematisk problembehandlingskompetence som *nogens indsigtsfulde parathed til selv at formulere og løse såvel rene som anvendelsesorienterede matematiske problemer og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.*

Som det fremgår har begge kompetencer både en "undersøgende" side, hvor forståelse og kritisk bedømmelse af allerede udførte processer er i fokus, og en "produktiv" side, hvor fokus er på selv at kunne gennemføre den type processer som kompetencen stiller skarpt på (jf. Niss & Jensen; 2002, p. 63f). For modelleringskompetencens vedkommende betyder det, at begge instanser af det sociale argument for demokratisering (jf. omtalen på side 111) er indeholdt i definitionen.

6.5.2 Karakteristiske forskelle

I en matematikundervisningspraksis er det nemt at forestille sig betydelige overlap mellem situationer der udfordrer hver af de to kompetencer. Gennemførelsen af en matematisk modelleringsproces vil som nævnt ofte indebære løsningen af et eller flere anvendelsesorienterede matematiske problemer, ikke mindst i forbindelse med selve modelbehandlingen (fase (c) og (d) i figur 6.2 på side 114), og alle anvendelsesorienterede matematiske problemer er som nævnt på side 118 del af en matematisk modelleringsproces, som modtageren af problemet blot føres ind i på et stadie hvor dele af processen er gennemført.

"Kernen" i de to kompetencer er imidlertid forskellig (jf. Blomhøj & Jensen; 2003): Matematisk modelleringskompetence handler om en arbejdsproces, hvis væsentligste karakteristika er behovet for forskellige former for *afgrænsning og præcisering* for at leve op til det definerende ved processen: At gøre en ekstra-matematisk udfordring tilgængelig for matematisk repræsentation og bearbejdning. Matematisk problembehandlingskompetence handler om at håndtere en personlig oplevelse, hvis væsentligste karakteristika er *frustration* over ikke at vide hvordan man skal få "hul på bylden" (hvilket forudsætter at man i den konkrete situation forstår hvad problemet består i).

6.6 Teknologisk og demokratisk kompetence

Teknologisk kompetence bruger jeg som betegnelse for *nogens indsigtsfulde parathed til selv at udvikle og udnytte teknologi og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.*

Demokratisk kompetence bruger jeg som betegnelse for *nogens indsigtsfulde parathed til selv at være medlevende deltager i et demokrati og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.*

6.6.1 Om definitionernes bevidste åbenhed

Også disse definitioner rummer en dualitet mellem en undersøgende og en produktiv side. Desuden er de – igen i lighed med definitionerne af matematisk modelleringskompetence og matematisk problembehandlingskompetence – dynamiske i den forstand, at de implicit lægger op til, at man løbende i forbindelse med brug af kompetencebegreberne afklarer, hvad der ligger i begreberne "teknologi" og "demokrati".

Denne åbenhed er valgt bevidst som et forsøg på at gøre kompetencebegreberne konstruktivt debatskabende. Ved at indskrive en bestemt forforståelse af "teknologi" og "demokrati" (og tilsvarende af "matematisk modellering" og "matematisk problemløsning") i definitionerne ville man sende det efter min mening forkerte signal, at der er tale om kanoniske begreber som blot har ventet på en endegyldig analytisk afklaring.

I projektet her har det ikke været et ærinde at gennemføre en egentlig analyse af teknologibegrebet, som det fx er gjort i Jensen & Skovsmose (1986) og Skovsmose (1988), men en enkelt bemærkning er alligevel på sin plads. Som jeg tidligere har antydet (side 43) bruger jeg teknologi som betegnelse for redskaber som forøger de menneskelige udfoldelsesmuligheder (jf. Skovsmose; 1988, p. 26). "Udfoldelsesmuligheder" skal blot forstås som at man kan noget med teknologien som man ikke så godt kan uden. Om det "noget" er godt eller skidt må man forholde sig til og diskutere med udgangspunkt i konkrete eksempler på teknologianvendelse (jf. Skovsmose; 1988). Begrebskarakteristikken er således hverken et forsøg på at udtrykke en manifest teknologioptimisme (jf. omtalen af en sådan på side 43) eller -pessimisme, men et forsøg på at fastholde, at en sådan dikotomisering af diskussionen ikke er konstruktiv.

Demokratibegrebet har jeg forsøgt at give fylde med karakteristikken i kapitel 4 af den danske korporatistiske samfundsmodel. Demokrati som jeg bruger begrebet er imidlertid en udfordring andre steder end i livet som samfundsborger. Det er i Hal Koch's forstand en samværsform som man kan stræbe efter at etablere hver gang to eller flere personer opfatter sig som del af det samme fællesskab:

> "[Demokrati er] ikke en lære, der kan doceres, og som man i en håndevending kan tilegne sig eller gå over til. Det er en tankegang, en livsform, som man først tilegner sig derved, at man lever den igennem i det allersnævreste private liv, i forhold til familie og naboer, derefter i forholdet udadtil i større kredse, i forholdet til landsmænd, og endelig i forholdet til andre nationer [...]. Demokratiet kan aldrig sikres – netop fordi det ikke er et system, der skal gennemføres, men en livsform, der skal tilegnes. Det drejer sig om et sindelag, der skal bibringes hvert nyt slægtsled.
>
> [...] Det er samtalen (dialogen) og den gensidige forståelse og respekt, som er demokratiets væsen." (Koch; 1991/1945, p. 13 og 16)

Et andet bud på hvor fællesskaber som de her nævnte eksisterer, kunne være "de fire liv", som der opereres med i U90 (Undervisningsministeriet; 1978a, p. 12ff): Familielivet, fritidslivet, arbejdslivet og samfundslivet. Som jeg var inde på i diskussionen af forholdet mellem matematisk modellering og demokratisk kompetence på side 111 kan demokrati i arbejdslivet for skoleelever blandt andet bestå i at etablere en demokratisk kultur i klasserummet. Det vender jeg tilbage til senere i afhandlingen, når et konkret klasserum er blevet bragt på banen.

7 Systematiseringen – nogle konklusioner

På side 27 indledte jeg denne del af afhandlingen med to spørgsmål som jeg mener analysen i de mellemliggende kapitler har retfærdiggjort følgende svar på (jf. Gregersen & Jensen; 1998, kap. 10):

Begrebet "matematisk modellering" bruger jeg som betegnelse for en proces hvor alle faserne i den matematiske modelleringsproces – som jeg betegner motivering, systematisering, matematisering, matematisk analyse, fortolkning og evaluering – gennemgås med henblik på at konstruere og analysere en matematisk model.

Begrebet "matematisk problemløsning" bruger jeg som betegnelse for den proces hvorigennem man forsøger at løse et matematisk problem. Ved et matematisk problem forstår jeg en situation der involverer en række metode-åbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene, og hvor de metodemæssige overvejelser involverer visse matematiske begreber, metoder og resultater.

Begrebet "kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation.

Begrebet "matematisk modelleringskompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at gennemføre alle dele af en matematisk modelleringsproces og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "matematisk problembehandlingskompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at formulere og løse såvel rene som anvendelsesorienterede matematiske problemer og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "teknologisk kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at udvikle og udnytte teknologi og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "demokratisk kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at være medlevende deltager i et demokrati og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebsmæssig klarhed muliggør reflekteret opgavevalg: Jeg kan temmelig præcist karakterisere matematikopgaver fra to vinkler. Den ene drejer sig om hvilke dele af *den matematiske modelleringsproces* en given opgave udfordrer modtageren til selv at arbejde aktivt med og hvilke dele der eventuelt er gennemført af opgavestilleren. Den anden drejer sig om hvorvidt der er tale om *et problem* eller *en øvelse* relativt til en given målgruppe.

Uanset hvilke begrundelser for at gennemføre matematikundervisning man som enkeltperson eller som officielt organ har, kan en sådan opgavekarakteristik bidrage til at skabe bedre overensstemmelse mellem disse begrundelser og valg af opgavetyper.

Anvendelsesorienterede opgaver udgør et spektrum hvor modellering udgør det mest komplekse yderpunkt.

Modellering – en årsagsdiskussion: Graden og omfanget af anvendelsesorientering – og dermed også modellering – i matematikundervisningen er primært en diskussion der fører tilbage til årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Modellering og den økonomisk/tekniske årsag (jf. side 31): I halvtresserne, hvor den eksterne fagopfattelse kan karakteriseres som teknologisk pragmatisme, spillede modellering ikke nogen rolle i gymnasiets matematikundervisning, der udelukkende skulle lægge det matematiske fundament til videre studier.

I nutidens matematikundervisning henviser den økonomisk/tekniske årsag i stadig højere grad til matematiks anvendelser indenfor ikke-naturvidenskabelige fagområder parallelt med de traditionelle naturvidenskabelige anvendelser; matematikanvendelserne er "eksploderet" i omfang dækkende en stadigt bredere fagvifte. Matematisk modellering som element i matematikundervisning har et stort potentiale i forhold til at forberede eleverne på at kunne imødekomme de arbejds- og studiemæssige krav, en sådan bredspektret matematikanvendelse stiller.

Modellering og den individorienterede årsag (jf. side 31): Som jeg vurderer det er ønsket om – parallelt med en teknologisk kompetence – at udvikle elevernes demokratiske kompetence det væsentligste karakteristikon ved ændringen gennem de sidste ca. 35 år af årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Matematisk modellering i matematikundervisningen har et stort potentiale i forhold til udvikling af en sådan demokratisk kompetence. Potentialet står og falder med at de motiverende, systematiserende og kritisk vurderende delprocesser er integrerede elementer i den samlede arbejdsproces forbundet med matematisk modellering.

Modellering og strukturalisme: Som reelt virkende årsag bag "den ny matematik" har jeg peget på det behov 60'er-reformatorerne oplevede for indsocialisering af tilstrækkeligt mange unge mennesker i en moderne udgave af matematik *som videnskabsfag*. Det filosofiske udgangspunkt herfor kan helt entydigt siges at være *strukturalisme*. Med et sådant udgangspunkt har matematisk modellering – i den betydning jeg tillægger begrebet – ingen potentialer relateret til årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Modellering og socialkonstruktivisme: I den socialkonstruktivistiske tilgang til matematik er der derimod store årsagsrelaterede potentialer i at arbejde med matematisk modellering. Modelleringsarbejde understreger flere angrebsvinkler og metoder og udviklingsprocessen er ofte karakteriseret ved dynamisk samspil mellem flere aktører, og viser dermed matematikken på en ikke-autoritær, ikke-isoleret og ikke-produktorienteret måde.

Problemløsning – en læringsmæssig diskussion: Vægtningen mellem problemer og øvelser i matematikundervisningen er primært en læringsmæssig diskussion der fører tilbage til, hvilken form for forståelse man som enkeltperson eller som officielt organ ønsker at fremme.

Problemløsning og relationel læring: Problemløsning i matematikundervisningen har et læringsmæssigt potentiale i forhold til at udvikle elevernes *relationelle* forståelse af de indgående matematiske begreber. Deri ligger at problemløsning vil kunne bidrage til en langsigtet forståelse med anvendelsesmuligheder indenfor mange forskellige domæner, men også at det er en tidskrævende måde at arbejde med stoffet på.

Et forståelsesmæssigt potentiale ved modellering: Forståelsesmæssigt er det væsentligste potentiale ved modellering at det – praktiseret som en proces, eleverne selv arbejder sig igennem – udvider de domæner som eleverne konstruktivt kan aktivere deres matematiske begreber indenfor. Anvendelsen af et givet matematisk begrebsapparat til at modellere en ekstra-matematisk problemstilling bidrager til, at de matematiske begreber assimileres i en række ekstra-matematiske semantiske strukturer der aktiveres i forbindelse med denne problemstilling.

Samspil mellem problemløsning og modellering: At matematisk problemløsning og matematisk modellering ofte vil være i spil samtidig, da mange modelleringsforløb vil afstedkomme problemer undervejs, gør det ikke mindre relevant at kunne skelne mellem de udfordringer de to typer aktiviteter afstedkommer, tværtimod.

Evnen til at skelne oplever jeg som en styrke ved tilrettelæggelsen af undervisningen, både fordi man derved kan stille skarpt på, hvilke kompetencer det *egentlig* er man ønsker at eleverne udvikler, og fordi man i forbindelse med modelleringsaktiviteter lettere kan analysere, hvori elevernes vanskeligheder ligger.

Del III

Didaktificering

8 Introduktion til del III

c) Hvilke *tilrettelæggelsesmæssige karakteristika* i forhold til måden matematisk modellering potentielt kan integreres i undervisningen på kan jeg med afsæt i teoretiske analyser argumentere for som værende centrale, hvis målet er i så vid udstrækning som muligt at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence?

8.1 Didaktificering?

Forrige del af afhandlingen havde overskriften "Systematisering". Ved at anlægge forskellige perspektiver på matematik som undervisningsfag mundede denne del af den samlede analyse ud i, at jeg kunne pege på en række potentialer ved nogle nærmere karakteriserede former for matematiske aktiviteter, in casu matematisk modellering og matematisk problembehandling.

Metodisk set er de to centrale ord i denne korte karakteristik *perspektiver* og *potentialer*, fordi de indikerer den store "flyvehøjde" som matematikundervisningen blev anskuet fra. Der har bevidst været tale om en analyse som er abstrakt i forhold til en konkret undervisningspraksis, med det formål at sætte scenen for en diskussion og analyse af en sådan praksis.

I den del af analysen som jeg nu tager fat på at formidle, har bestræbelsen metodologisk set bestået i at gøre den abstrakte analyse konkret i forhold til en tænkt undervisningspraksis. Den samlede analyse skal forpligtes på det der i min begrebsverden konstituerer en (matematik)didaktisk analyse, nemlig at det er *(matematik)undervisningsmæssige* sammenhænge der er omdrejningspunktet (jf. indledningen til kapitel 2 på side 13). Det er for at understrege betydningen af en sådan forpligtelse at jeg har valgt at rapportere om denne del af analysen i en selvstændig del af afhandlingen, og det er denne forpligtelse jeg henviser til med betegnelsen "didaktificering".

Skiftet fra systematisering til didaktificering fordrer en betydelig ydmyghed med hensyn til hvilken form for sammenhæng, man forventer mellem de to former for analyse. Den centrale udfordring i den henseende består for mig at se i at undgå at forivre sig rent analytisk og falde i det jeg vil kalde *determinismefælden.*

8.1.1 Determinismefælden

Determinismefælden består i (implicit) at arbejde ud fra en hypotese om, at der analytisk set kan sættes implikationstegn fra teoretiske studier af undervisning til det læringsmæssige udbytte af at deltage i en sådan undervisning. Undervisningens konkrete tilrettelæggelse fungerer som forbindelsesled, og det betyder at determinismefælden faktisk rummer to former for determinisme.

Teoretiske studier versus undervisning

Den ene handler om *forholdet mellem teoretiske studier og undervisningens tilrettelæggelse og gennemførelse*. Determinismen resulterer her i en tro på, at der eksisterer en bedste måde at tilrettelægge og gennemføre undervisning på som kun varierer i kraft af at den er en funktion af formålet med undervisningen. Hvis man i en bestemt kontekst kan nå til klarhed om dette formål er det derfor kun et spørgsmål om analytisk skarphed at finde ud af hvordan man bør undervise. Konkret i forhold til mit projekt ville det betyde, at didaktificeringen var et forsøg på at uddrage logisk givne konsekvenser af systematiseringen: "For at indfri de fundne potentialer ved at gøre matematisk modellering til omdrejningspunktet for matematikholdig undervisning på almendannende uddannelser skal tilrettelæggelsen heraf *nødvendigvis* ske på følgende måde: ... "

En sådan entydig sammenhæng eksisterer ikke. Heldigvis, for det ville gøre undervisning til et underligt robotagtigt foretagende. Omvendt er alle måder at undervise på jo heller ikke lige gode i forhold til et givet formål. Heldigvis, for det ville betyde at al undervisning i bogstaveligste forstand er ligegyldig. Min tilgang – og de fleste andres hvis man tænker sig om og undgår at forivre sig – ligger et sted mellem disse to absurde yderpunkter: Der er visse former for undervisning som man kan analysere sig frem til som værende hensigtsmæssige (og andre former som man tilsvarende kan vurdere som uhensigtsmæsige) i den forstand, at de respekterer og er i overensstemmelse med resultatet af bestemte teoretiske studier, som således udgør præmissen for vurderingen.

Det er denne tilgang der er grunden til, at jeg i spørgsmål c) øverst på forrige side har brugt det ydmyge ordvalg "argumentere for som værende centrale" frem for mere bombastiske og naive fordringer i stil med "pege på som værende nødvendige" eller "argumentere for som værende de bedste".

Undervisning versus læring

Den anden form for determinisme som determinismefælden rummer, handler om *forholdet mellem undervisningens tilrettelæggelse og gennemførelse* *og det læringsmæssige udbytte af at deltage heri.* "Fælden" består her i at komme til at arbejde ud fra den forestilling at der eksisterer en deduktiv årsag-virknings-sammenhæng mellem tilrettelæggelse og læring:

> "Learning cannot be designed. Ultimately, it belongs to the realm of experience and practice. It follows the negotiation of meaning; it moves on its own terms. It slips through the cracks; it creates its own cracks. Learning happens, design or no design. And yet there are few more urgent tasks than to design social infrastructures that foster learning."[1]

Den sidstnævnte form for aktivitet – at skabe sociale infrastrukturer som fremmer læring – er et godt bud på en definition af hvad undervisning vil sige. Med det udgangspunkt er pointen i citatet, at det der kan og bør tilrettelægges er undervisning, ikke læring. En sådan tilrettelæggelse er vigtig, fordi læringen bl.a. sker som en *respons* herpå (Dolin et al.; 2003, p. 83).

8.1.2 Samspil mellem forskning og undervisningspraksis

En positivt fremadrettet konsekvens af at pege på de to sider af determinismefælden er, at den gode lærer bl.a. er karakteriseret ved konstant at stille to former for kritiske spørgsmål til sin egen tilrettelæggelse af undervisningen:[2] Er den – tilrettelæggelsen – i overensstemmelse med og inspireret af forskellige mere overordnede (teoretiske) perspektiver på undervisningen af lærings- og begrundelsesmæssig karakter? Giver den observerede respons på undervisningens gennemførelse anledning til at revidere tilrettelæggelsen heraf?

Dette perspektiv på den gode lærer har haft betydning for mit arbejde med didaktificeringsdelen af det kombinerede forsknings- og udviklingsprojekt som rapporteres i denne afhandling. Det hænger sammen med, at et af mine bagvedliggende motiver for at ville gennemføre projektet som tidligere nævnt har været at blive klogere på, hvordan forskningsbaseret viden om og praksis indenfor matematikundervisning kan virke gensidigt inspirerende.

At det i forhold til dette projekt ville være tilfældet for mig som forsker, har jeg ikke på noget tidspunkt været i tvivl om. Hvorvidt mine bidrag til projektet ville være inspirerende for de lærere jeg gerne ville involvere, samt interessante at følge for lærerkolleger og andre personer involverede i matematikundervisningens organisering og tilrettelæggelse, troede og tror jeg derimod er betinget af, at didaktificeringen dels knytter an til den

[1] Etienne Wenger (1998). *Communities of Practice – Learning, meaning, and identity*, Cambridge University Press, Cambridge, UK. Her taget fra Dolin et al. (2003, p. 83).

[2] Jævnfør omtalen af "den gode matematiklærer" i Niss & Jensen (2002, p. 158ff)

eksisterende undervisningspraksis som disse personer oplever den, dels ikke forsøger at fastlægge tilrettelæggelsen ned til mindste detalje, og derved gør det svært for den enkelte at forestille sig personligt tilpassede varianter (Jensen; 2000a, p. 38).

Med andre ord: Selv om jeg havde troet på en entydig sammenhæng mellem bestemte teoretiske studier og en nøje fastlagt måde at tilrettelægge undervisningen på, ville en sådan analyse ikke være et konstruktivt bidrag til et forsknings-udviklings-samarbejde, fordi det ikke stimulerer de former for refleksion som jeg ovenfor pegede på er med til at karakterisere den gode lærer.

8.2 Fire ankerpositioner

Opmærksomheden på determinismefælden og ønsket om at stimulere andre deltagere i projektets tilrettelæggelsesmæssige refleksioner peger i samme retning: Didaktificeringen skal munde ud i nogle overordnede principper for undervisningens tilrettelæggelse, som dels er så konkrete at de bidrager til at sikre at resultaterne af systematiseringen respekteres, dels er så abstrakte at de ikke sender det signal, at der nu foreligger en "opskrift" på hvordan der skal undervises som overflødiggør yderligere tilrettelæggelsesovervejelser.

I projektet her er det blevet til fire såkaldte "ankerpositioner" i relation til undervisningens tilrettelæggelse (jf. Jensen; 2000a):

Ankerposition 1: Matematisk modellering skal indgå som en tilbagevendende aktivitet i undervisningen og skal stræbe mod at foregå som elevstyret problemorienteret projektarbejde gennemført i grupper.

Ankerposition 2: Rammerne for undervisningen skal overvejende bestå i specificering af nogle kompetencer som eleverne skal arbejde mod at udvikle, og kun i begrænset omfang af traditionel pensumlistning.

Ankerposition 3: I de perioder hvor der ikke arbejdes projektorganiseret, skal undervisningen stræbe efter at etablere en didaktisk kontrakt karakteriseret ved at

i) arbejde med problemløsning konsekvent går *forud* for lærerstyret gennemgang,

ii) de forhold som der fra forskningsmæssig side argumenteres for karakteriserer evnen til matematisk problemløsning eksplicit gøres til genstand for undervisning,

iii) elevernes metakognitive viden forsøges udviklet ved at de selv deltager i udvælgelsen af opgavetyper med udgangspunkt i en erkendelse af problemløsning og øvelsesregnings forskellige læringsmæssige status,

iv) en betydelig del af problemløsningen udfordrer evnen til at matematisere en ekstra-matematisk problemstilling.

Ankerposition 4: De projektrapporter som er det synlige resultat af de gennemførte modelleringsforløb, skal indgå i evalueringen af elevernes udbytte af undervisningen på en så substantiel måde, at det set i bedømmelsesøjemed er fordelagtigt for eleverne at tillægge arbejdet hermed betydelig vægt.

Tilsvarende skal besiddelse af en generel problemløsningskompetence indgå i evalueringen på en måde der gør det fordelagtigt at arbejde systematisk med at udvikle en sådan kompetence.

Disse fire ankerpositioner er mit svar på spørgsmål c) på side 135. I de følgende to kapitler vil jeg begrunde og motivere ankerposition 1, 2 og 3 ved at analysere deres forhold til systematiseringen i forrige del af afhandlingen.

Påpegningen af evalueringens betydning i form af ankerposition 4 er ikke resultatet af en selvstændig analyse fra min side, og vil derfor ikke blive viet et selvstændigt kapitel her i afhandlingen. Fraværet af selvstændig analyse på dette område betyder dog ikke at fokuseringen på evalueringsformen er grebet ud af den blå luft. Både blandt lærere og forskere indenfor det didaktiske felt er der en udbredt erkendelse af, at måden der evalueres på har en kraftigt tilbagevirkning på måden der undervises på (Galbraith; 1993; Niss; 1993). Det er derfor at spænde ben for sig selv at arbejde med undervisningsformen uden at forsøge at indrette evalueringsformen i overenstemmelse hermed.

9 Projektarbejde og matematiske kompetencer

Så langt som her kan afhandlingen karakteriseres som en systematisering, uddybning og sammenføjning af betragtninger, argumenter og analyser som er kendt i den matematikdidaktiske litteratur.

I dette kapitel udfolder jeg følgende kæde af ræsonnementer som udgør afhandlingens kerne: I lyset af et ønske om at bidrage til udvikling af demokratisk kompetence ligger der et stort potentiale i at lade eleverne arbejde med de "ydre" dele af den matematiske modelleringsproces, fordi disse dele af processen er centrale både for udviklingen af matematisk modelleringskompetence og for skabelsen af en demokratisk klasserumskultur. Et centralt element i dette potentiale består i at eleverne udvikler autonomi i beskæftigelsen med matematiske modeller, hvilket man på grund af karakteren af en modelleringsproces kan argumentere for forudsætter elevstyrede læreprocesser. I den forbindelse er projektarbejde gennemført i grupper en velegnet tilrettelæggelsesform, og problemorientering er et godt "værktøj" til at hjælpe med at holde processen fokuseret.

Når det drejer sig om matematisk modellering kan problemorienteringen imidlertid ikke stå alene, fordi der er tale om at anlægge et bestemt perspektiv på en problemstilling som per definition ikke er fuldt indlejret i dette perspektiv. Det er nødvendigt at integrere evnen til at fastholde perspektivet som en central del af læringsmålet, og til det formål er det en potentielt frugtbar strategi at bygge læreplaner op omkring et sæt af faglige kompetencer, herunder matematisk modelleringskompetence.

9.1 Matematisk modellering og projektarbejde

Som jeg bruger begrebet (jf. afsnit 6.2 på side 107ff) fordrer matematisk modellering pr. natur en længere sammenhængende arbejdsproces end arbejde med traditionelle matematikopgaver gør. Desuden er det – som med de fleste undervisningsaktiviteter – processen snarere end resultatet, der er det læringsmæssigt interessante ved at arbejde med matematisk modellering, hvilket gør det naturligt at afslutte arbejdet med en tilbagemelding, fx. en rapport, hvor der reflekteres over mere end bare et resultat med to streger under.

Som jeg bruger ordet gør denne karakteristik det naturligt at benytte sig af projektarbejde som måde at organisere undervisning i matematisk modellering på.

9.1.1 Nogle centrale aspekter ved projektarbejde

Projektarbejde bruger jeg som betegnelse for *en organisationsform kendetegnet ved en længerevarende sammenhængende arbejdsproces som munder ud i at der produceres et konkret produkt, fx. en rapport.*

Hermed har jeg også givet udtryk for, at der er en række vigtige forhold i relation til undervisning som mange mennesker mere eller mindre artikuleret forbinder med projektarbejdsformen[1], men som jeg betragter som noget, man uafhængigt heraf kan og bør forholde sig til i forbindelse med tilrettelæggelse af al undervisning. Jeg vil nævne fire sådanne forhold (Jensen; 2000a,b).

Frihedsgrader

Med betegnelsen frihedsgrader refererer jeg til, hvilke dele af en given arbejdsproces eleverne selv er herre over og hvilke dele læreren (eller andre deltagere i undervisningen som repræsenterer "systemet") afgør forløbet af, samt hvordan en sådan bestemmelsesret gør sig gældende. De to yderpositioner er oplagt henholdsvis totalt lærerstyrede og totalt elevstyrede arbejdsprocesser.

Lærerstyret proces $\longleftrightarrow$ Elevstyret proces

[1] Det gælder fx følgende definition fra den en overgang meget brugte "Grundbog i projektarbejde" (Berthelsen et al.; 1985, p. 23):

> "Projektarbejde definerer vi som et pædagogisk arbejdsmønster, hvor elever eller studerende – i samarbejde med lærere og evt. andre – udforsker og behandler et eller flere problemer i nær relation til den samfundsmæssige virkelighed, de forekommer i. Dette indebærer, at arbejdet skal give stadig stærkere oplevelse, dyberegående erkendelse og øget perspektiv, at problemerne angribes og belyses fra forskellige synsvinkler uafhængigt af traditionelle faggrænser, og at valget af teorier, metoder og redskaber styres ud fra de valgte problemer. Lærernes rolle er ikke blot at formidle viden, men også i solidaritet med eleverne at fungere som igangsættere, inspiratorer, rammesættere, vejledere og konsulenter. Arbejdet skal munde ud i et konkret produkt, der kan være en mundtlig fremlæggelse, en skriftlig rapport, eller være udtrykt i andre medier eller handlinger."

Orientering

Denne dimension i undervisningen vedrører hvad det er man orienterer sig mod når man skal afgrænse en given undervisningsmæssig aktivitet, fx projektarbejde. Her betragter jeg henholdsvis emneorientering og problemorientering som de to yderpositioner.

Emneorientering ⟷ Problemorientering

Ved emneorientering ("Skriv om hvad du/I har lært om trigonometri") er afgrænsningen mere eller mindre direkte givet ved, hvad der kan siges at falde indenfor det pågældende emne. Ved problemorientering ("Hvor lange brædder kan man få rundt om et hjørne?") ligger afgrænsningen i, hvad der skønnes at være relevant arbejde for at kunne sige noget kvalificeret om problemets løsning.

Faglig forankring

Denne betegnelse refererer til i hvilken grad og på hvilke måder en given undervisningssituation forsøger at skabe forbindelser mellem det faglige felt som undervisningen traditionelt er bygget op omkring, og fænomener fra den omgivende verden.

For et abstrakt fag som matematik spænder yderpositionerne vidt: I den ene ende af "skalaen" befinder sig de rent fag-interne problemstillinger, som udelukkende opererer indenfor en etableret formalisme. I den anden ende af skalaen befinder sig naturligt nok det fag-eksterne, som man kan trække i retning af ved at problemstillingerne gøres mere og mere anvendelsesorienterede. Med den tidligere introducerede sprogbrug udgør invitationer til "fuldbyrdet" matematisk modellering den anden yderposition for faget matematiks vedkommende (jf. omtalen på side 119).

Fag-intern problemstilling ⟷ Fag-ekstern problemstilling

Når jeg nævner dette spektrum af muligheder er det dels for at understrege, at det at lægge vægt på modellering selvfølgelig er udtryk for et bevidst valg, dels for at gøre opmærksom på at projektarbejdsformen kan praktiseres helt uafhængigt af graden af udgangspunktets faglige forankring.

Social interaktion

Denne dimension handler om hvilke former for samspil der indgår i en given undervisningssituation. Her er det relevant at skelne mellem mindst to principielt forskellige former for interaktion; den mellem læreren og eleverne og den indbyrdes mellem eleverne.

Interaktion med læreren af en eller anden form vil altid være en del af en undervisningssituation. Hermed ikke sagt at det ikke er noget man bør reflektere over, tværtimod, det er bare ikke muligt at undertrykke interaktionen mellem læreren og eleverne så direkte, som det er tilfældet med den indbyrdes interaktion mellem eleverne. Her er der et valg at gøre som oplagt har stor betydning for graden af interaktion, nemlig mellem individuelt arbejde og forskellige grader af gruppearbejde.

Individuelt arbejde ⟷ Gruppearbejde

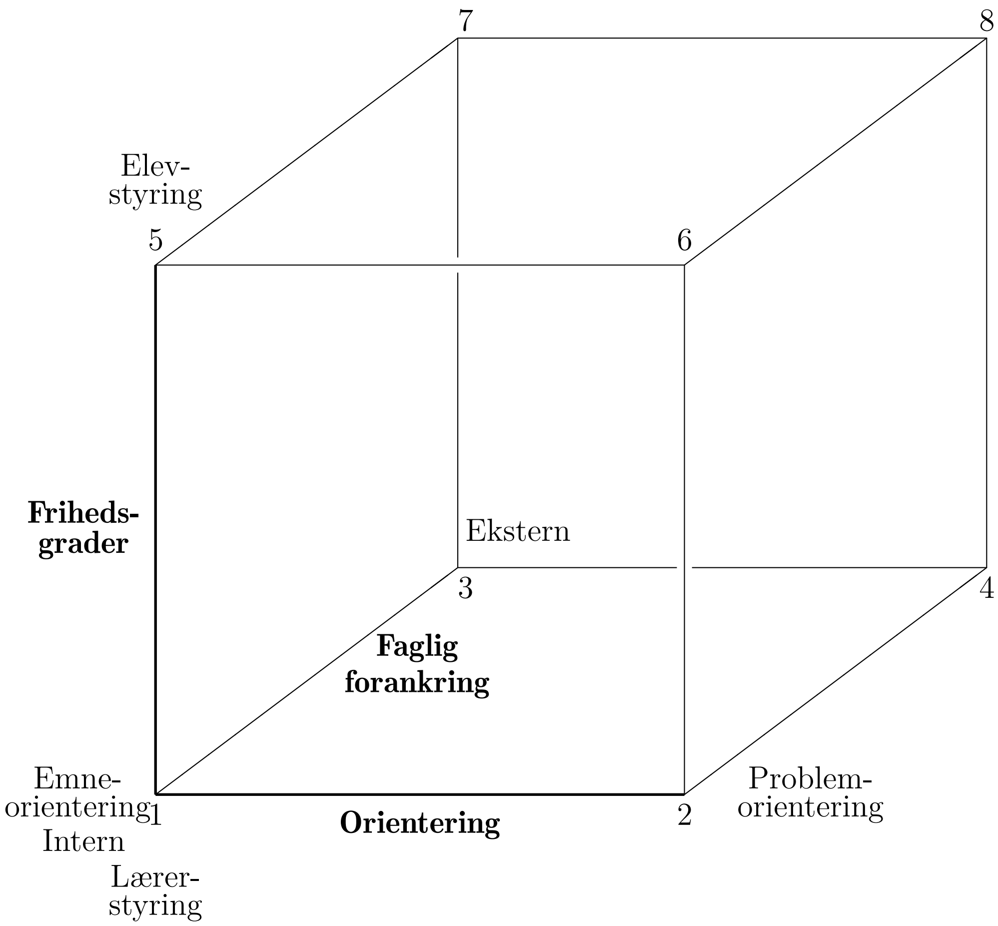
9.1.2 Et didaktisk mulighedsrum

Den sidstnævnte af disse fire dimensioner – social interaktion – har jeg ikke været inde i en nærmere analyse af, men blot af forskellige grunde valgt side til fordel for gruppearbejde. En grund er at det at arbejde med at etablere et konstruktivt samarbejde i en gruppe i sig selv kan være med til at udvikle demokratisk kompetence, jf. omtalen på side 111. En anden grund er at gruppearbejde formodentlig er læringsmæssigt fornuftigt i lyset af, at kommunikation med andre efterhånden er anerkendt som en essentiel del af mange former for læring. En tredje grund er at jeg personligt har mægtig gode erfaringer såvel læringsmæssigt som mere generelt socialt med at arbejde i grupper gennem det meste af min studietid, og derfor har en naturlig forkærlighed for denne form for interaktion.

At jeg på denne måde isoleret set har taget stilling til karakteren af den sociale interaktion er også udtryk for, at denne stillingtagen ikke for mit vedkommende har været afhængig af, hvordan jeg forholder mig til de øvrige tre forhold nævnt ovenfor.

I modsætning hertil oplever jeg "frihedsgrader", "orientering" og "faglig forankring" som indbyrdes forbundne dimensioner i orkestrering af undervisning. Det er denne forbundethed jeg har forsøgt at visualisere i figur 9.1 ved at lade de tre dimensioner udspænde et didaktisk mulighedsrum, som jeg gennem utallige foredrag, kursusdage mv. (Jensen (2000b) er et eksempel) har erfaret udgør et nyttigt stillads for diskussioner i relation til orkestreringen af projektarbejde.

At udse sig en foretrukken placering i dette rum er udtryk for, at man i forhold til de udpegede dimensioner har valgt at stile efter en bestemt måde at tilrettelægge undervisning på. Som alle andre tilrettelæggelsesmæssige overvejelser må og skal et sådant valg være en afspejling af refleksioner over målet med undervisningen i den konkrete situation. Det er blandt andet i forhold til at diskutere nødvendigheden af at erkende denne betingethed af tilrettelæggelsesovervejelser at jeg har oplevet det som frugtbart



Figur 9.1 Et didaktisk mulighedsrum i forbindelse med projektarbejde.

at introducere et mulighedsrum.

Det samme gør sig gældende i afhandlingen her, hvor jeg har valgt at bringe mulighedsrummet på banen for at understrege, at når jeg nu i forhold til det her rapporterede projekt placerer mig selv i mulighedsrummet er der tale om et valg som kræver en begrundelse, fordi der eksisterer reélle alternativer til denne placering.

Mit valg, som er et resultat af ønsket om at bidrage til udviklingen af demokratisk kompetence gennem beskæftigelse med matematisk modellering, svarer til at bevæge sig i retning af hjørne 8 i det didaktiske mulighedsrum:

Ankerposition 1: Matematisk modellering skal indgå som en tilbagevendende aktivitet i undervisningen og skal stræbe mod at foregå som elevstyret problemorienteret projektarbejde gennemført i grupper.

9.2 Elevstyret undervisning – et dilemma

Ankerposition 1 indeholder en fordring som kan virke så oplagt at den næsten overses, nemlig at det er nødvendigt at praktisere matematisk modellering for at blive god til matematisk modellering.

Det hviler på en tese om at man (også) skal praktisere den form for aktivitet som man gerne vil være god til, for at blive god til det. Antitesen – at man kan klare sig med andre, ofte mindre komplekse og mere generelle former for aktivitet som strukturelt, indholdsmæssigt eller på anden vis har noget til fælles med det man gerne vil blive god til – rummer en god del af forklaringen på 60'er-reformisternes forsøg på at imødekomme samfundets ønske om udvikling af teknologisk kompetence gennem en fagligt set indadskuende tilrettelæggelse af matematikundervisningen med udgangspunkt i matematikkens mest generelle og abstrakte strukturer.

Jeg har ikke selv været inde i en nærmere analyse af disse forhold, men har blot brugt ovenstående tese som afsæt for den videre analyse. At det ikke teoretisk set er noget kontroversielt valg fremgår af, at Mogens Niss (1999a, p. 15ff) som et af hovedresultaterne indenfor matematikkens didaktik nævner, at det – desværre – er naivt at tro på udstrakt transfer i forbindelse med matematiklæring, ikke kun med hensyn til implikationen eller manglen på samme mellem intern matematikforståelse og udvikling af matematisk modelleringskompetence som her er i fokus, men helt generelt.

9.2.1 Nødvendigheden af elevstyring

Fordringen om at praktisere matematisk modellering som et element i forsøget på at udvikle matematisk modelleringskompetence trækker fordringen om elevstyring med sig. Det hænger sammen med karakteristikken af den matematiske modelleringsproces som jeg illustrerede den i figur 6.2 (side 114), og betydningen af at arbejde med de "ydre" dele af processen i forhold til udviklingen af elevernes matematiske modelleringskompetence som element i en mere generel demokratiske kompetence, jf. analysen i afsnit 6.2.4 på side 111f.

Hvad vil det egentlig sige at beherske disse "ydre" dele af den matematiske modelleringsproces – motivering, systematisering, fortolkning og evaluering – som element i at besidde matematisk modelleringskompetence? Det vil sige at man *autonomt* kan og vil foretage de vurderinger og på den baggrund gennemføre de mere direkte handlinger som karakteriserer de respektive dele af den matematiske modelleringsproces, hvilket blot er et forsøg på at karakterisere hvad det indebærer at *styre* modelleringsprocessens fremadskriden. Hvis ikke en sådan styring af processen medtænkes i en karakteristik af matematisk modelleringskompetence reduceres begrebet i en grad der gør, at der ikke længere er tale om en kompetence men om evne til at udøve en række færdigheder i en bestemt rækkefølge, jf. sammenligningen af de to begreber i afsnit 6.4.2 (side 125f).

Behovet for svar-åbne udfordringer

Når styringen af processen er særlig vigtig i forhold til de "ydre" dele skyldes det at der er tale om *svar-åbne udfordringer* i den forstand, at den usikkerhed som nødvendiggør en vurdering ikke kun går på valget af metode til at kunne komme videre i en bestemt retning, hvilket jeg parallelt med ovenstående vil referere til som *metode-åbne udfordringer*, men også på hvad der er den mest hensigtsmæssige retning at komme videre i.

I den henseende er fordringerne til arbejdet med matematisk modellering et specialtilfælde af et generelt behov for åbne situationer i uddannelser med et demokratisk sigte:

> "An implication of the pedagogical argument of democratization [jf. side 111] is that we have to develop open situations in the educational process, i.e. situations which could take diffferent directions depending on the results of discussions betweeen students and students, and between students and teacher. Opening the situation means to create possibilities for educational decisions to be taken in the classroom. Students must have the possibility to form the educational process if not to become adapted to unquestionable rituals of mathematical education." (Skovsmose; 1990a, p. 119)

To sider af matematisk modelleringskompetence

Den foreløbige argumentation for behovet for åbne situationer gælder – som den kritisk opmærksomme læser måske har bemærket – kun undervisning med sigte på at lære eleverne *selv* at gennemføre matematisk modellering, svarende til det jeg på side 126 kaldte den produktive side af matematisk modelleringskompetence. Hvad med den undersøgende side, hvor udfordringen består i at forholde sig kritisk til allerede gennemførte matematiske modelleringsprocesser?

Her peger Ole Skovsmose i forlængelse af ovenstående citat på et behov for at udvikle undervisningsmateriale der er "empowering", dvs. beskæftiger sig med en matematisk model som bruges i forbindelse med vigtige sociale aktiviteter i samfundet, og har fokus på forholdet mellem modellens udseende og de antagelser som er en integreret del heraf med det formål at udvikle en forståelse af samfundsmæssige processer (Ibid., p. 113f, hvor Hermann & Niss (1982) nævnes som eksempel). Dette behov gør den tilrettelæggelsesmæssige udfordring i forbindelse med undervisning med fokus på matematisk modellering modsætningsfyldt:

> "We face one problem when we succeed in developing open materials [...]: will it be possible to build up any critical knowledge when occupied in this project? And we face another problem when we succeed in developing empowering materials [...]: will it be possible to avoid too much pre-structuring of the situation, too much lecturing, to build up that complicated stock of factual knowledge obviously needed to understand the functions of a real model?" (Ibid., p. 120)

Det første af de to problemer der her peges på, ser jeg som et specialtilfælde af et mere generelt dilemma som jeg opfatter som meget centralt og derfor vil analysere nærmere nedenfor: Hvordan kan man med udgangspunkt i et bevidst svar-åbent oplæg til en elevstyret arbejdsproces fastholde et bestemt udefra fastlagt læringsmæssigt mål med aktiviteten?

Det andet problem sætter efter min vurdering fingeren på det ømme punkt i forhold til idéen om at tage udgangspunkt i materiale – eller mere generelt situationer (Ibid., p. 114) – som er potentielt myndiggørende[2], når man ønsker at udvikle den undersøgende side af elevernes matematiske modelleringskompetence. Og det i en sådan grad at det fejer benene væk under denne ide ved at pege på følgende problematiske implicitte antagelse: At man kan tage folk i hånden og føre dem langt ind i et komplekst sagsforhold, i tilfældet her ved hjælp af materiale som karakteriserer forskellige diskuterbare forhold vedrørende anvendelse af en kompliceret matematisk model, og så forvente at de er motiverede til at anlægge kritiske perspektiver på dette sagsforhold, når man slipper deres hånd og lader det være op til dem at styre resten af undersøgelsen.

At denne antagelse er problematisk skyldes at der er meget der tyder på (se fx Vithal et al.; 1995, p. 211), at elevers tilbøjelighed til at kaste sig ud i de kritiske refleksioner som i demokratisk øjemed er så efterspurgte i forbindelse med matematisk modellering, har meget at gøre med om de selv har stået for – eller været tæt inde i en analyse af – de afgrænsende dele af modelleringsprocessen som ofte er objektet for de kritiske refleksioner. Der er godt nok ikke mange positive erfaringer som kan bekræfte denne hypotese, ikke mindst fordi der generelt meget sjældent eksperimenteres med at lade eleverne styre de indledende dele af et projektarbejde. Men de erfaringer jeg kender til med at basere en kritisk undersøgelse på ovennævnte antagelse, peger på, at eleverne har vanskeligt ved at "springe ud" som modelkritikere når de først overtager styringen langt henne i undersøgelsen.

Det mest veldokumenterede eksempel herpå jeg kender til, er Iben Maj Christiansens forsøg fra først i 1990'erne på at hjælpe tre matematiklærere i det almene gymnasium i Danmark med at udvikle deres respektive elev-

[2] Hvilket er den bedste oversættelse af "empowering" jeg kan finde på.

ers kritiske attitude til anvendelsen af matematisk modellering i forbindelse med politiske beslutningsprocesser (jf. Christiansen; 1996, 1997). Iben Maj Christiansen var inspireret og vejledt af Ole Skovsmose og eksperimenterede i alle de tre beskrevne projektforløb[3] ret direkte med hans anbefaling om at starte processen op ved hjælp af potentielt myndiggørende materiale og supplerende læreroplæg (se fx Christiansen; 1996, p. 128f). Samtidig tilstræbte hun at arbejdet med modellerne så vidt som det var muligt skulle foregå som problemorienteret elevstyret projektarbejde (Ibid., p. 129), svarende til en ambition om at bevæge sig i retning af hjørne 8 i det didaktiske mulighedsrum (figur 9.1 på side 145).

Dermed kom forskningsprojektet i tilknytning til de tre gymnasieforsøg til at beskæftige sig med det spændingsfelt mellem behovet for henholdsvis åbne og potentielt myndiggørende materialer som Ole Skovsmose karakteriserede i citatet ovenfor, og konklusionen i den forbindelse er rimelig klar: En “podningsstrategi” hvor problemformuleringen næsten er givet i kraft af den kontekst eleverne præsenteres for, gør det vanskeligt og unaturligt for dem at engagere sig i efterfølgende modelkritiske diskussioner og selvstændigt komme med alternative perspektiver og synspunkter (Ibid., p. 144ff). I et senere tilbageblik når Iben Maj Christiansen (2001b) derfor frem til samme fremadrettede hypotese som jeg allerede har været inde på: Elevers tilbøjelighed til at kaste sig ud i kritiske refleksioner i forbindelse med matematisk modellering har meget at gøre med, om de selv på en ikke-perifer måde har været involveret i en analyse af de afgrænsende dele af modelleringsprocessen som ofte er objektet for de kritiske refleksioner.

9.2.2 Dilemmaet

Den umiddelbare konklusion man kan drage på dette sted i analysen er, at elevstyrede undervisningsprocesser er en nødvendighed, både generelt i forhold til udvikling af elevernes demokratiske kompetence og specifikt i forhold til udvikling af den produktive og antageligt også den undersøgende side af matematisk modelleringskompetence.

Udfordringen til tilrettelæggere af undervisning kan derfor synes at være simpel og ligefrem at forstå og forholde sig til, omend muligvis vanskelig at møde i praksis fordi den bryder med indgroede opfattelser af lærer- og elevrollen: Giv eleverne frihed til at bestemme over uddannelsesprocessen i enhver henseende, så udvikles deres evne og lyst til at påtage sig dette ansvar mest muligt. Der skal ikke være nogen underliggende dagsordener i den måde vi som lærere iscenesætter forskellige situationer på, som Ole

[3] Med fokus på henholdsvis ozonlagsnedbrydning, planlægning af Øresundsforbindelsen og prognoser for befolkningstallet i et eller flere lande.

Skovsmose peger på i direkte forlængelse af det ovenfor citerede:

> "Another version of this implication is that we have to develop open teaching-learning materials, which could be used in a variety of situations. Open materials must not presuppose a specific teacher-student relationship or lay down implicit teaching-learning programmes." (Skovsmose; 1990a, p. 120)

Fuldkommen elevstyring er imidlertid en umulighed i uddannelsessammenhæng. Uddannelse som social aktivitet er blandt andet karakteriseret ved at den sættes i værk med et formål der rækker ud over at give nogle mennesker mulighed for at mødes, og ikke blot er et tilbud til deltagerne, men en delvis kolonisering og dermed umyndiggørelse af dem. Eller sagt med andre ord: En planlagt uddannelsesaktivitet holder op med at være uddannelse hvis den løsriver sig fra enhver større sammenhæng som i udgangspunktet var eller kunne have været med til at definere den, jf. den matematikfaglige analyse i kapitel 4.

En given arbejdsproces giver altså kun uddannelsesmæssigt set mening, hvis den formår at fastholde den orientering af processen som følger af omverdenens forventninger til uddannelsen, ofte udtrykt i form af et officielt erklæret formål. Og et sådant formål er det ikke op til nogle af deltagerne i undervisningen (lærer, elever eller andre) at fastlægge autonomt, hvilket umuliggør fuldkommen elevstyret (og fuldkommen lærerstyret) undervisning.

Herved opstår et modsætningsforhold som jeg vil referere til som *dilemmaet ved at undervise i orienteret autonomi* (se også Blomhøj & Jensen; 2007): Hvis man i uddannelsessammenhæng ønsker at udvikle orienteret autonomi – gøre deltagerne "selvstændige på en bestemt måde" – er man på den ene side nødt til at lægge op til elevstyring af arbejdsprocessen og på den anden side nødt til at sikre at den pejling der finder sted, giver processen den ønskede orientering, dvs. får den til at bevæge sig i en retning som er i overensstemmelse med de uddannelsesmæssige mål.

I en sociologisk set systemorienteret kontekst peger Knud Illeris på det samme grundlæggende modsætningsforhold i en bog, der af mange karakteriseres som den første samlede fremstilling af de bærende idéer bag projektarbejde som det praktiseres på store dele af Roskilde Universitetscenter (RUC):

> "Set fra 'systemets' side er der således tale om et dilemma (som måske nok fornemmes, men sjældent eller aldrig bliver præcist eller bevidst for 'systemets repræsentanter'): på den ene side er der et vitalt behov for udviklingen af kreative kvalifikationer, på den anden side må denne udvikling holdes indenfor de givne rammer, d.v.s. begrænses til at udvikle sig på systemets præmisser." Illeris (1974, p. 50)

Med de begreber jeg tidligere har introduceret, kan man også formulere det som at den uddannelsesmæssige udfordring består i at udvikle elevernes kompetence til autonomt at slå ind på og fastholde en af andre valgt tilgang til en bestemt type af svar-åbne udfordringer.

I forhold til et ønske om at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence som led i udviklingen af demokratisk kompetence kan dilemmaet ved at undervise i orienteret autonomi formuleres således: På den ene side er det nødvendigt at lade elevernes arbejdsproces tage udgangspunkt i så svar-åbne udfordringer at muligheden for at de selv kan stå for alle dele af den matematiske modelleringsproces fastholdes. Ellers går en væsentlig del af potentialet i forhold til udvikling af demokratisk kompetence tabt. På den anden side er det nødvendigt at sikre, at eleverne forsøger at "angribe" den åbne udfordring ved hjælp af matematisk modellering. Også selv om der – som det altid er tilfældet, jf. diskussionen af "det definerende spørgsmål" for anvendelsesorienterede matematiske opgaver på side 106 – findes alternative tilgange som er meningsfulde i forhold til udfordringens karakter, men blot ikke er i overensstemmelse med det uddannelsesmæssige mål med aktiviteten.

9.2.3 Problemorientering og eksemplaritet

Et ofte foreslået virkemiddel til at håndtere dilemmaet ved at undervise i orienteret autonomi er at gøre undervisningen problemorienteret. Det gælder eksempelvis Erik Laursen (1998), som med afsæt i erfaringer fra Aalborg Universitet trækker tråde fra traditionelle plusord som "at lære at lære" og "ansvar for egen læring" til selvstændig læring, og argumenterer for at selvstændig læring kræver frihedsgrader i undervisningen, og at problemorienteret projektarbejde kan ses som et forsøg på at imødekomme dette behov. Også Skovsmose (1988, p. 38) og Vithal et al. (1995, p. 211) refererer tilsvarende erfaringer fra Aalborg Universitet, i begge tilfælde med direkte reference til matematikuddannelsen.

Problemorientering opfattet som selvstændigt mål

Tilsvarende argumenter findes også i den klassiske RUC-inspirerede retorik omkring brugen af projektarbejde. I Berthelsen et al. (1985), hvis definition af projektarbejde jeg citerede på side 142, udpeges problemorientering eksempelvis direkte som en nødvendighed:

> "Ved forståelsen og anvendelsen af projektarbejde som pædagogisk arbejdsmønster er det centralt og afgørende hele tiden af fastholde, at projektarbejde er *problemorienteret*, og når en projektgruppe er kommet til klarhed over, hvilket emne den vil arbejde med, er den næste opgave at

> præcisere udgangspunktet for det videre arbejde i en eller flere konkrete problemformuleringer." (Ibid., p. 72-73)

Den stærke tiltro til problemorientering som virkemiddel som kommer til udtryk her, bygger eksplicit på en tro på det der i Josephsen & Ulriksen (2002, p. 9) kaldes *problemformuleringens styringsmæssige funktion*:

> "problemformuleringen skal sikre et fokus og hjælpe de studerendes egen regulering af arbejdet. Problemformuleringen skal bidrage til at det projekt de studerende arbejder med er tilstrækkeligt fokuseret og afgrænset til at det er gennemførligt inden for de rammer der er. Problemformuleringen skal derfor fungere afgrænsende på den måde at den skal være et redskab for de studerendes vurderinger og beslutninger hen gennem projektforløbet, f.eks. med hensyn til inddragelse af litteratur, opstilling af eksperimenter eller feltarbejde, retning for analysen af de frembragte data, osv." (Ibid., pp. 9-10)

Mere implicit bygger den ovennævnte – og efter min vurdering meget udbredte – retorik omkring den problemorienterede arbejdsforms store potentiale imidlertid også på en tro på, at et eller flere problemer kan pege på substansen i det der skal læres, hvis blot man er omhyggelig og reflekteret nok i valget af formulering. Eller sagt med andre ord: At en problemformulering *i sig selv* kan virke som "overenskomst" mellem de deltagende elever og læreren som systemets repræsentant i forhold til at sikre den ønskede orientering af den elevstyrede arbejdsproces.

Hvis målet med en uddannelse (blandt andet) er at blive klogere på bestemte problemfelter, vil det langt hen ad vejen være muligt at få en problemformulering til at virke på denne måde. Den opfattelse var en del af den klassiske RUC-inspirerede retorik på baggrund af en argumentation som – jf. Christiansen (1999, p. 58) – på slagordsform kan formuleres som "virkelige problemer respekterer ikke faggrænser":

> "Det helt centrale ved den problemorienterede undervisningsform er, at udgangspunktet ikke tages i de gennem traditionen udviklede fag, hvis konstituering ligger langt tilbage i fortiden og var betinget af forlængst forsvundne samfundsforhold – men derimod i foreliggende problemer, der findes her og nu, og i hvis behandling de forskellige fags viden, metoder og teorier inddrages i det omfang, det netop ud fra den pågældende problemstilling er relevant." (Illeris; 1974, pp. 80-81)

Med et sådant forhold mellem et problem og måden det behandles på kommer problemorientering til at referere til undervisningens indholdsaspekt (Ibid., p. 86), og får således det Josephsen & Ulriksen (2002, p. 9) kalder "en curriculær funktion":

> "Problemformuleringen har betydning for stofudvælgelse: netop fordi problemformuleringen fungerer afgrænsende, har den også konsekvenser for

> hvad de studerende kommer til at arbejde med af fagområder. Problemformuleringen får på den måde en curriculær (eller læreplansmæssig) funktion. [. . .]" (Ibid., p. 10)

Det eksemplariske princip

Med det udgangspunkt består udfordringen i problemorienteret undervisning i at formulere et problem (eller et sæt af problemer) som i forhold til et på forhånd fastlagt problemfelt er *eksemplarisk*. Betydningen af dette begreb forsøger Lars Ulriksen (1997, pp. 30-31) at indkredse på følgende vis:

> "Mens problemorienteringen vedrører stoffets organisering, og deltagerstyringen spørgsmålet om hvem der styrer, så knytter det eksemplariske princip sig til *stofudvælgelsen*.
>
> [. . .] Hovedideen er at koncentrere læringen om 'det væsentlige' og arbejde med repræsentative eksempler som lader sig overføre på en helhed.
>
> Det eksemplariske princip stilles over for den systematiske organisering af stoffet i trin, niveau for niveau, hvor hver enkelt del af læreforløbet er *forstadie* til det næste, alt tjener som *forberedelse* til det virkelige. I *det eksemplariske princip* er den enkeltdel man fordyber sig i ikke et niveau eller trin, men 'et spejl af helheden' (Wagenschein; 1956, p. 133). Man søger det hele i det enkelte."

Denne indkredsning af hvad der er kernen i det eksemplariske princip svarer helt til min egen opfattelse af begrebet – med en enkelt central undtagelse som jeg vender tilbage til i næste afsnit.

Den sidste del af citatet knytter an til en ofte fremhævet[4] grund til at benytte det eksemplariske princip; det såkaldte *stoftrængselsproblem*: Når studier af et fagområde ikke længere er et livsprojekt for nogle få priviligerede personer som af den ene eller anden grund ikke behøver bekymre sig om de materielle sider af tilværelsen, men er noget der skal finde sted inden for rammerne af en tidsafgrænset uddannelsesstruktur, så er det uhensigtsmæssigt at tilrettelægge studierne med udgangspunkt i et uopnåeligt mål om at lære alt relevant inden for det pågældende fagområde. Det vil føre til at man med afsæt i en given prioritering af stoffet starter "fra en ende af" og så når så langt som tiden tillader, hvilket er en temmelig tilfældig måde at prioritere og arbejde med stoffet på.

Eksemplarisk i forhold til hvad? Og for hvem?

Blandt andet som en konsekvens af stoftrængselsproblemet skal man altså ifølge det eksemplariske princip koncentrere sig om "det væsentlige" ved at bruge den tid der er til rådighed til at undersøge repræsentative eksempler herpå. Herved bliver der tale om at forsøge at løse ét sæt af problemer

[4] Jævnfør fx Christiansen (1999, 2001a); Ulriksen (1997); Wagenschein (1956).

ved implicit at formulere et andet, for *hvad* er "det væsentlige" man skal koncentrere sig om på en given uddannelse og *for hvem* er det væsentligt?

De svar som indgik i den klassiske RUC-inspirerede retorik omkring projektarbejde fra 1970'erne og første halvdel af 1980'erne stammer fra sociologen Oscar Negt, hvis position Lars Ulriksen (1997, p. 31) fremstiller således:

> "'I forhold til hvad' var hos Negt dels et samfunds arbejdsdelte totalitet af produktions- og reproduktionsprocesser i en historisk dimension (det var 'det hele'), dels de sociologiske forhold som var relevante for samfundets, klassernes og individernes liv (det var 'det enkelte') (Negt 1971[5], s. 27). 'For hvem' var arbejderklassen."

De problemfelter som Negt anså som væsentlige at arbejde eksemplarisk med, var altså eksplicit politiske. Det er derfor ikke så overraskende at RUC som barn af studenteroprøret tog afsæt i hans tanker ved etableringen af projektarbejdsformen (jf. Christiansen; 2001a, p. 10), ikke mindst på det samfundsvidenskabelige og det humanistiske hovedområde. Desuden – og det er det væsentlige i denne sammenhæng – passer Negts ikke-faglige udgangspunkt som fod i hose med idealet om, at det er de formulerede problemers karakter der skal danne udgangspunkt for de gennemførte analyser, ikke bestemte på forhånd udpegede (faglige) angrebsvinkler og metoder (jf. det ovenstående citat fra Illeris; 1974, pp. 80-81). Negts analyse skabte en harmoni mellem de projektarbejdsmæssige idealer om problemorientering, deltagerstyring og eksemplaritet[6].

Faglighed som et perspektiv på udfordringer

Problemet i sammenhængen her er, at "den Negt'ske harmoni" brydes når (en del af) målet med uddannelsen er at udvikle matematisk modelleringskompetence. Her er der ikke tale om at "udgangspunktet tages [...] i foreliggende problemer, der findes her og nu, og i hvis behandling de forskellige fags viden, metoder og teorier inddrages i det omfang, det netop

[5] Ulriksen referer til bogen "Sociologische Phantasie und exemplarisches Lernen", 2. udgave, Europäische Verlagsanstalt, Frankfurt am Main, Vesttyskland. I dansk udgave er bogen udkommet på RUC boghandel og forlag i 1975 med titlen "Sociologisk fantasi og eksemplarisk indlæring".

[6] Harmonien eksisterede kun så længe der var konsensus om det politiske udgangspunkt for brugen af det eksemplariske princip. I takt med at det som en konsekvens af afpolitiseringen af universitetsuddannelserne ikke længere er tilfældet på RUC, er det blevet en stadig større udfordring at finde brugbare alternativer til det Negtske udgangspunkt, ikke mindst i de miljøer hvor det traditionelt har udgjort grundstammen i projektpædagogikken. Ulriksen (1997), Christiansen (2001a) og Josephsen & Ulriksen (2002) rummer tilsammen en interessant analyse og diskussion af dette lokale aspekt af projektpædagogikkens historie.

ud fra den pågældende problemstilling er relevant" (Ibid.), tværtimod. Udøvelse af matematisk modelleringskompetence handler om at vælge, lade sig styre af og kritisk forholde sig til en bestemt optik, når man møder en udfordring som man mener inviterer hertil. Hvilke udfordringer det i uddannelsessammenhæng er hensigtsmæssigt at arbejde med bør derfor være en afledt størrelse i forhold til valget af optik, ikke omvendt.

Hermed kommer arbejdet med matematisk modellering til at fordre en form for eksemplaritet som harmonerer med den tyske fysiker og didaktiker Martin Wagenscheins position. I en klassisk artikel (Wagenschein; 1956) som var med til at igangsætte diskussionen om brugen af det eksemplariske princip i forbindelse med undervisningstilrettelæggelse, argumenterer han med eksempler fra forskellige naturvidenskabelige grundfag for, at fag skal anskues og læres som en måde at tænke og gå til udfordringer på. Ved at anskue verden gennem et bestemt fags "briller" når man frem til bestemte former for indsigt og resultater som den faglige optik får til at træde frem, og kernen i at lære et fag består både i at lære at benytte sig af denne optik og i at udvikle en kritisk bevidsthed om, at der er tale om en blandt mange anskuelsesmåder med karakteristiske fordele og ulemper.[7]

9.3 En kompetenceorienteret læreplan

Men hvad er det mere præcist eksemplariteten skal være orienteret imod? Et forsøg på at "eksemplaritetssikre" arbejdsprocessen ved at indskrive den i en problemformulering ("Undersøg hvad matematisk modellering kan bidrage med i forhold til at undersøge . . . ") sætter bare ord på uafklaretheden ved at forsøge at konkretisere en tautologisk betragtning om at undervisning i matematisk modellering har som mål at lære eleverne matematisk modellering[8]. Hvordan gør man det eksemplariske princip operationelt i forhold til tilrettelæggelse og orkestrering af undervisning, når målet hermed gør at problemorientering ikke i sig selv kan bruges til at sikre den ønskede orientering af den elevstyrede arbejdsproces som jeg har argumenteret for er så central i forhold til udvikling af matematisk modelleringskompetence?[9]

[7] se endvidere Christiansen (1999, p. 58ff), Christiansen (2001a, p. 9f) og Ulriksen (1997, p. 31)

[8] Hvilket er et specialtilfælde af en mere generel tautologi om at matematikundervisningens mål er at lære eleverne matematik (jf. Niss & Jensen; 2002, p. 40).

[9] Det spørgsmål tilbød Wagenscheins analyse ikke noget svar på, hvilket nok skal ses som en væsentlig del af forklaringen på at hans og andre samtidiges arbejde ifølge Lars Ulriksen (1997, p. 31) ikke gav det eksemplariske princip og den bagvedliggende orientering mod helhedsorienterede uddannelser nogen særlig vind i sejlene i forhold

Svaret på dette spørgsmål ligger på baggrund af den forudgående analyse på sin vis lige for: Man understøtter at en given elevstyret arbejdsproces får den orientering som målet med uddannelsen peger på der skal være, ved så præcist som muligt at indskrive disse mål som en del af rammerne for undervisningen. I tråd med det fokus som har været bærende for både projektet her og det tidsmæssigt parallelt kørende KOM-projekt (jf. omtalen heraf på side 82f), kan det ske ved, at man som alternativt styringsredskab til et omfangsrigt pensum opstiller en række faglige kompetencer som undervisningen skal sigte mod at eleverne udvikler og som signalerer den ønskede "toning" af undervisningen.

Hermed er vi tilbage ved analysen af det eksemplariske princip og min indvending mod Lars Ulriksens bud på en definition heraf, jf. citatet på side 153: I stedet for at fremhæve "stofudvælgelsen" som det centrale ord vil jeg pege på *indholdsudvælgelsen* som en mere generel og rammende term, der også kan indfange hvilke kompetencer omgangen med stoffet er tænkt til at skulle udvikle. Derved åbnes der op for, at den eksemplariske bestræbelse ikke kommer til at handle om *hvad* man skal beskæftige sig med i undervisningen (hvad enten der er tale om udvalgte problemstillinger eller udvalgte stofområder), men om *hvordan* man vælger at arbejde med tingene.

Således håber jeg at have motiveret den anden ankerposition:

Ankerposition 2: Rammerne for undervisningen skal overvejende bestå i specificering af nogle kompetencer som eleverne skal arbejde mod at udvikle, og kun i begrænset omfang af traditionel pensumlistning.

til den faktisk gennemførte uddannelsesplanlægning. Christiansen (2003) rummer en interessant analyse af dette forhold med fokus på de danske universiteters indledende grundfagsundervisning.

10 Den didaktiske kontrakt i kursusarbejdet

I dette kapitel analyserer jeg den del af arbejdet med udvikling af elevernes matematiske modelleringskompetence der ikke tilrettelægges som projektarbejde: Hvilke karakteristika kan jeg argumentere for som værende centrale for denne del af undervisningen?

For at denne analyse giver mening er der imidlertid et andet spørgsmål som man er nødt til at svare bekræftende på: Er der overhovedet fornuft i at benytte sig af andre tilrettelæggelsesformer end projektarbejde med sigte på udvikling af matematisk modelleringskompetence, hvis undervisningens omdrejningspunkt netop er et ønske om at støtte en sådan kompetenceudvikling?

10.1 Hvorfor også kursusarbejde?

Praktisering af matematisk modellering er en nødvendig betingelse for udviklingen af matematisk modelleringskompetence (jf. side 146). Om det også er en tilstrækkelig betingelse afhænger nok af hvad der mere eller mindre eksplicit stiles efter når man snakker om at udvikle matematisk modelleringskompetence. Hvis man mener bestemte former for refleksion i tilknytning til egen og andres matematiske modellering er en konstituerende del heraf, er omgivelsernes – i praksis ofte lærerens – tilskyndelse til sådanne refleksioner givetvis et nødvendigt supplement til elevernes autonome arbejde med matematisk modellering. For eksempel forsvarer Ole Skovsmose (1990a, p. 119f) et sådant forbehold overfor tilstrækkeligheden af selvstændig modelleringsaktivitet i forhold til bevidsthed omkring de magtrelationer der etableres i forbindelse med anvendelsen af matematiske modeller som teknologi i diverse beslutningsprocesser.

Det er med andre ord kun den *produktive* side af matematisk modelleringskompetence (jf. omtalen på side 126) som hypotetisk kan udvikles udelukkende ved at praktisere “fuldbyrdet” matematisk modellering.

10.1.1 Den holistiske og den atomistiske tilgang

Jeg har ikke villet forfølge denne hypotese videre, fordi jeg – selv om det skulle vise sig at være muligt – ikke mener det er *hensigtsmæssigt* at forsøge at udvikle den produktive side af matematisk modelleringskompetence gennem en så enstrenget tilrettelæggelse af undervisningen. Udfordringen når man skal tilrettelægge undervisning med sigte på udvikling af matematisk modelleringskompetence består således for mig at se i at finde en balance mellem to ekstremer; den holistiske og den atomistiske tilgang (Blomhøj & Jensen; 2003, pp. 128-129).

Den holistiske tilgang består i at anvende den tid man har til rådighed til at lade eleverne gennemføre eller kritisk forholde sig til "fuldbyrdet" matematisk modellering. Jeg har allerede tidligere været inde på to ofte fremførte argumenter for at trække i denne retning. Det drejer sig for det første om den ovennævnte nødvendighed af at praktisere matematisk modellering hvis det er det man vil være god til. Hvis man kun arbejder med dele af den samlede proces begrænses kompetenceudviklingen i overensstemmelse hermed. For det andet er det selv at blive udfordret til at arbejde med et fuldt gennemløb af modelleringsprocessen ofte mere motiverende for eleverne end at overtage en halvt løst opgave fra læreren.

Den atomistiske tilgang består i at fordele den tid man har til rådighed ud på arbejde med de forskellige delelementer – "atomer" – som den efterstræbte helhed – "molekylet" – består af. Det helt dominerende argument for at trække i denne retning er, at det at lade eleverne arbejde sig igennem en matematisk modelleringsproces i et sammenhængende forløb er en temmelig tidskrævende læringsproces. Det gælder ikke mindst det jeg i figur 6.2 på side 114 kalder motivering og systematisering, hvor mange lærere frustreres over den megen tid eleverne ofte bruger på at arbejde sig igennem disse første faser af modelleringsprocessen. Denne tid er – med en atomistisk tilgang til undervisning i matematisk modellering – bedre brugt på at nå nogle flere gange igennem de delprocesser der af mange lærere opleves som de mest krævende for eleverne; matematisering og matematisk analyse (Ibid.).

10.1.2 Hvad kendetegner kursusarbejde?

Med en holistisk tilgang er projektarbejde et naturligt valg som organisationsform, jf. min karakteristik heraf på side 142. Underviserens rolle bliver at vejlede eleverne gennem matematiske modelleringsprocesser med alle de udfordringer det rummer, jf. analysen i forrige kapitel.

Med en atomistisk tilgang får undervisningen karakter af programmeret instruktion (jf. omtalen på side 34). Om den udfordring det efterlader til undervisere af en bestemt faglighed som fx matematik, siger Schoenfeld (1987a, p. 5):

> "Thus, the bulk of one's attention should be on analysis of subject matter. Gagné [pioneren på området] focused on constructing careful *task analyses*, which entails decomposing the material to be learned into small building blocks that are mastered individually and later combined into larger units of competency".

Det centrale her er at opgaveanalysen ikke i første omgang foregår på det psykologisk læringsmæssige plan rettet mod *hvordan* man som underviser skal orkestrere elevernes arbejde med en given opgave, men på det mere overordnede tilrettelæggelsesmæssige plan rettet mod *hvad* de centrale udfordringer rummer af delelementer som hver især er undervisningsbare.

I en kompetenceorienteret undervisning er analysen af hvad der skal læres ikke så meget rettet mod fagligt stof som mod faglige kompetencer, men det ændrer ikke ved dekomponeringen og sekventeringen af det faglige indhold som det karakteristiske ved en atomistisk tilgang.

Når jeg bruger begrebet *kursusarbejde* er det som betegnelse for en undervisning kendetegnet ved en sådan sekventering.

10.1.3 Problemløsning og begrebsforståelse er "kursusegnet"

Jeg mener som nævnt ikke man bør diskutere undervisning med sigte på udvikling af matematisk modelleringskompetence som et enten eller mellem den holistiske og den atomistiske tilgang, men som et både og hvor udfordringen ligger i at få de to tilgange til at spille konstruktivt sammen. Det skyldes ikke mindst mine erfaringer med matematikuddannelsen på Roskilde Universitetscenter (RUC), hvor jeg først som studerende og siden som medudvikler af og underviser på et kursus på den naturvidenskabelige basisuddannelse (jf. Blomhøj et al.; 2001) har oplevet det frugtbare ved også at dekomponere helheden og arbejde med delelementer af den matematiske modelleringsproces. Min egen analyse af denne proces munder som nævnt ud i, at delprocesserne matematisering og matematisk analyse kalder på en atomistisk tilgang, hvor man som underviser gennemfører kursusforløb rettet mod de særlige udfordringer disse delprocesser rummer (jf. Blomhøj & Jensen; 2003).

Som jeg ser det er der to væsentlige grunde til at disse to delprocesser er særligt egnede til kursusorganiseret undervisning. Den første grund er, at disse delprocesser ofte får karakter af problemløsning, jf. afsnit 6.3 på side 120ff. Derved bliver udvikling af matematisk modelleringskompetence afhængig af en parallel udvikling af de løsningsrettede aspekter af matematisk problembehandlingskompetence (jf. karakteristikken heraf på side 126). Denne del af problembehandlingskompetencen, som jeg vil referere til som matematisk problemløsningskompetence, er der studier der tyder på effektivt kan udvikles gennem kursusarbejde (se ikke mindst Arcavi et al. (1998); Schoenfeld (1998)).

Den anden grund til at matematisering og matematisk analyse er særligt kursusegnede elementer af matematisk modellering er, at disse delprocesser mere end de øvrige står i et komplementært forhold til udvikling af relationel matematisk begrebsforståelse: De både forudsætter og udvikler den relationelle forståelse af de begreber som man vælger skal indgå i den matematiske repræsentation af modellen, jf. karakteristikken af modelbegrebet på side 107f. Hvis man overser forudsætningsdelen risikerer man, at en for lille matematisk "værktøjskasse" bliver en væsentlig begrænsende faktor i bestræbelserne på at udvikle matematisk modelleringskompetence. Hvis komplementariteten derimod rendyrkes gennem kursusarbejde rummer den store læringsmæssige potentialer (jf. Blomhøj et al. (2001); Ottesen (2001)).

10.2 Nogle fordringer til kursusarbejdet

Essensen af forrige afsnits analyse var, at det med udgangspunkt i et ønske om at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence er fornuftigt at investere noget af undervisningstiden i kursusarbejde med fokus på delprocesserne matematisering og matematisk analyse, ikke mindst de sider af disse delprocesser der udfordrer elevernes relationelle matematiske begrebsforståelse og problemløsningskompetence.

I dette afsnit vil jeg argumentere for nogle fordringer som jeg mener det er fornuftigt at stille til et sådant kursusarbejde.[1]

10.2.1 Aspekter af matematisk problemløsningskompetence

Hvordan lærer man så elever matematisk problemløsning? Det er og særlig har været et af de store temaer for matematikkens didaktik som forskningsfelt. Den mest fremtrædende person i denne udvikling er Alan Schoenfeld, som at dømme efter hans publikationsliste brugte det meste af 1980'erne og 1990'erne på sagen, med Schoenfeld (1985, 1992) som to af standardreferencerne.

[1] Afsnittet er med få undtagelser en sammenskrivning af redigerede citater fra Gregersen & Jensen (1998, kap. 9 og 10) og Jensen (2000a).

Begge publikationer er baseret på et længerevarende forsøgsarbejde som Schoenfeld gennemførte på University of California at Berkeley, USA. Forsøgets udgangspunkt mindede meget om mit eget, nemlig at tilrettelægge et undervisningsforløb med udgangspunkt i hvad man mener der skal til for at udvikle en eller flere faglige kompetencer, in casu matematisk problemløsningskompetence, og så lade valget af fagligt stof spille andenviolin. Efter utallige afviklinger af et sådant universitetskursus i matematisk problemløsning[2] udkrystalliserede Schoenfeld (1985, 1992) fem elementer (parallelt til mine fire ankerpositioner) som det er værd at ofre særlig opmærksomhed, fordi de viste sig afgørende for de studerendes udvikling af matematisk problemløsningskompetence:

- Kognitive ressourcer.
- Heuristik.
- Kontrol og metakognition.
- Følelser i forhold til – og forestillinger om – sig selv, omgivelserne, emnet, og mere overordnet om matematik.
- Skikke og sædvaner i matematikundervisningen.

Behovet for kognitive ressourcer vender jeg tilbage til i afsnit 10.2.2, efter nedenfor at have kommenteret de fire sidstnævnte punkter på Schoenfelds liste.

Heuristik

Heuristik er en betegnelse for det at "finde en vej" i forbindelse med videnskabelige eller tekniske frembringelser. Det at begynde at arbejde med heuristik i forbindelse med matematisk problemløsning kan entydigt tilskrives George Polya (1957/1945, 1962). Hans væsentligste bidrag var at gøre opmærksom på fire faser som kunne *beskrive* matematisk problemløsning som proces:

a) Forstå problemet.
b) Lav en plan.
c) Før planen ud i livet.
d) Se tilbage og vurder processen.

Den berømmelse og anerkendelse som denne karakteristik har opnået, skyldes i det væsentlige to ting. For det første gjorde beskrivelsen opmærksom på, at problemløsning rummer noget andet og mere end det at følge en allerede udarbejdet plan. For det andet kunne de fleste matematikere genkende deres egen problemløsningsmetode i Polyas beskrivelse. At en sådan generel beskrivelse var mulig kom bag på de fleste.

[2] Hvoraf et blev observeret og dokumenteret af et hold forskere udefra, Arcavi et al. (jf. 1998).

Schoenfelds projekt gik ud på at forfølge den inspiration han følte da han i en karrieremæssigt sen alder læste Polya (1957/1945), og forsøge at undervise med eksplicit udgangspunkt i den beskrevne heuristik. Det medførte bl.a. en konkretisering i forbindelse med Polyas punkt b) af forskellige generelle undervisningsbare planlægningsværktøjer, som med tiden fejlagtigt er blevet opfattet som synonyme med selve heuristikbegrebet; lav en tegning som visualiserer problemet, start med en simplere version af samme problem, osv.

Kontrol og metakognition

Metakognition er et ord som bruges i flere forskellige betydninger. Den følgende definition er ifølge Barkatsas & Hunting (1996, p. 16) den mest generelt accepterede fordi den udtrykker to centrale aspekter; overvågning og regulering af ens egne kognitive processer:

> "Metacognition refers to one's knowledge concerning one's own cognitive processes and products or anything related to them, e.g., the learning-relevant properties of information or data. Metacognition refers, among other things, to the active monitoring and consequent regulation and orchestration of these processes in relation to the cognitive objects on which they bear, usually in the service of some concrete goal or objective." (Flavell; 1976)

Ved at studere henholdsvis eksperters og novicers problemløsning er det tydeligt, at en af de afgørende forskelle er evnen til kontrol med egne løsningsstrategier. Udvikling af en sådan *metakognitiv kompetence* som en del af at lære eleverne at tage ansvar for egen læring bør derfor prioriteres højt ved undervisning i problemløsning (Schoenfeld (1987b, p. 192ff.) og Barkatsas & Hunting (1996, pp. 18–19)).

Følelser og forestillinger

a) "Der var engang et land. Der boede en masse mennesker, som der som oftest gør i et rigtigt land, og de fleste af dem var gift, men aldrig med mere end en af gangen. Utroskab forekom dog, men var på det strengeste forbudt. Nu forholdt det sig således, at alle mændene kendte til alle de utro koner, kun vidste ingen af dem, om deres egen kone var tro eller utro. At spørge hinanden faldt dem naturligvis ikke ind, endnu fjernere var forestillingen om at sladre. Men kongen vidste om al denne utroskab, så han befalede, at dersom en mand opdagede, at hans kone var ham utro, så skulle han øjeblikkelig dræbe hende samme nat. Ingen barmhjertighed! Nu gik der 63 dage og nætter uden at der skete noget, men på den 64-sindstyvende nat blev samtlige utro koner slået ihjel. Spørgsmål: Hvor mange utro koner var der i landet?" (Bastian; 1992, p. 112f.)

b) Bestem største- og mindsteværdi, monotoniforhold og eventuelle asymptoter for funktionen f givet ved

$$f(x) = \frac{3x^3 - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 3x} \quad , \quad x \in [1;4]$$

Hvilken af disse to opgaver vil du helst bruge tid på? Garanteret den første! Siden du har gidet læse helt hertil i afhandlingen er du nemlig givetvis matematiker i den forstand, at du er interesseret i, fascineret af og god til matematik. Opgave a) vil derfor sikkert opleves som et problem umiddelbart, mens opgave b) er en rutinemæssig øvelse som sikkert vil tage lidt tid at lave, men ingen strategiske overvejelser kræver. Og som matematiker er du næsten defineret ved at du foretrækker matematiske problemer frem for matematiske øvelser.

Pointen er at en typisk elev *i en undervisnings- eller eksamenssituation* vil reagere lige modsat. Han eller hun vil – hvis vi forestiller os det foregår på gymnasialt niveau – genkende opgave b) som en måske lidt svær variant af en klassisk opgavetype; funktionsundersøgelse. Alle de indgående delspørgsmål er grundigt øvet i timerne, hvorfor han/hun i hvert fald vil kunne starte på opgaven, hvilket er afgørende for at opgaven virker "tiltalende" i en situation hvor elevens formåen observeres, enten af læreren og de øvrige elever i forbindelse med den daglige undervisning eller i forbindelse med eksamen.

Opgave a) vil i samme ufrie situationer derimod virke afskrækkende på gymnasieeleven, dels fordi det ikke er givet hvordan man i det hele taget skal starte opgaveløsningen, dels fordi der er en væsentlig risiko for at man ender med at måtte give op, hvilket unægtelig fremkalder følelser som kræver træning at håndtere (hvis du vil prøve at klare opgaven uden hjælp så lad være at læse denne fodnote[3]).

Det er helt afgørende for succesfuld inddragelse af problemløsning i matematikholdige almendannende uddannelser at der arbejdes direkte med at få eleverne til at føle sig som "små matematikere", hvilket blandt andet betyder at de foretrækker opgave a) frem for opgave b).

Skikke og sædvaner

Omtalen af følelsernes betydning for evnen til problemløsning fører os naturligt over i en diskussion af hvordan matematikundervisning på de almen-

[3] Forudsæt at alle mændene er uhyre snedige og intelligente, og husk så at utroskab faktisk forekommer, dvs. der er *mindst* en utro kone. Hvis der faktisk kun er én, vil hendes mand kunne regne det ud (hvorfor?) og derfor dræbe hende første nat. Da det ikke sker må der altså være mere end én utro kone. Herfra er det et spørgsmål om induktion!

dannende uddannelser typisk foregår. Schoenfeld (1987a, p. 27) nævner en skik i matematikundervisningen (som min erfaring til fulde bekræfter) som har meget uheldige konsekvenser for elevernes overordnede forestilling om matematik:

> "Suppose that during your entire academic career, every mathematics problem that you were asked was in fact a straightforward exercise designed to test your mastery of a small piece of subject matter. You were expected to solve such problems in just a few minutes: If you did not, it meant that you had not understood the material and the material should be explained to you again. Suppose in addition that this scheme was reinforced in class: Problems were expected to be solved rapidly, and teachers gave you the solutions if you did not produce the answers quickly. Having had the experience over and over again, you might eventually codify it as the following (implicit) rule: When you understand the subject matter, any problem can be solved in 5 minutes or less. The stronger form of this rule is even worse: If you fail to solve a problem in 5 minutes, give up.
>
> Unfortunately, this story is not hypothetical: My research indicates that this belief and a number of equally counterproductive beliefs about mathematics are all too common among our students."

Denne svada giver grobund for en – på sin vis triviel, men nok så vigtig – konklusion som er nem at forholde sig til som praktiserende matematiklærer: Hvis man har et ønske om at lære sine elever at løse problemer frem for bare at gennemføre øvelser, så er det en nødvendig betingelse at de ofte i undervisningen får tid og opbakning til rent faktisk at praktisere problemløsning.

10.2.2 Forståelse, læring og problemløsning

Problemløsning kræver kognitive ressourcer i retning af evnen til at assimilere begreber i nye semantiske strukturer (schemas) (jf. omtalen af disse begreber i kapitel 5). Samtidig bidrager problemløsning også til at udvikle sådanne kognitive ressourcer fordi der arbejdes med at skabe forbindelser mellem begreber og aktiverbare semantiske strukturer der ikke allerede er assimilerede – hvis de var det ville udfordringen ikke opleves som et problem. Som nævnt i kapitel 6 (side 122f) betyder det at succesfuld problemløsning uundgåeligt bidrager til den relationelle forståelse ved at medvirke til at øge valensen af de begreber der aktiveres i forbindelse med problemløsningen.

Øvelser kan derimod både bidrage til at man forstærker *allerede eksisterende* forbindelser indenfor en aktiveret semantisk struktur, og altså således forstærker en eksisterende relationel forståelse, eller være udtryk for instrumentel forståelse hvis øvelsesprocessen gennemføres uden reference til en semantisk struktur.

Nødvendigheden af både problemer og øvelser

Når jeg mener denne forskellighed er så vigtig at den fortjener en uddybning er det ikke for at kunne sige, at udbygning af den relationelle forståelse ved hjælp af problemløsning til hver en tid er at foretrække for instrumentel forståelse opbygget ved hjælp af gentagne ensartede øvelser. Faktisk er langt det meste af hvad man foretager sig som menneske heldigvis baseret på automatiserede kognitive procedurer[4] som omhyggeligt fritager en fra at problemløse hele tiden. Tænk blot på de tusindvis af motoriske færdigheder som vi hver dag uproblematisk benytter os af: Vi går uden at overveje hvilket ben der nu skal sættes forrest; vi drikker af kaffekoppen uden at opleve afstandsbedømmelsen op til munden og koppens rette hældning som problemer der skal overvindes; etc.. Men den selvfølgelighed hvormed vi udfører procedurer som disse skyldes ikke, at vi er født med disse evner. Tværtimod har så godt som alt hvad vi som voksne foretager os været et problem på et tidspunkt i vores udvikling, som vi så – efter hårdt og slidsomt arbejde – har overkommet og siden gennem utallige gentagelser gjort til en triviel øvelse.

Det gælder også sikker og uproblematisk fastlæggelse af relationerne mellem alle de begreber vi betjener os af, så de stemmer overens med den almindelige sprogbrug både hvad angår dagligdags begreber og begreber fra fx matematik. For eksempel forbliver algebraiske manipulationer med variable repræsenteret ved bogstaver – fx ligningsløsning – et problem for en stor del af eleverne på de almendannende uddannelser. Det forsøger man så som lærer at ændre ved at sætte eleverne til at løse en masse ligninger i håb om at ligningsløsning for hovedparten af eleverne skifter karakter fra at være et problem til at være en øvelse. Man arbejder med andre ord på at eleverne danner en let tilgængelig semantisk struktur, hvor der er dannet konstruktive forbindelser mellem begreber som “ligning”, “variabel”, “tal”, “plus”, “minus” osv.. Først herefter er det muligt at gå videre med nye problemer der trækker på det at kunne løse ligninger uproblematisk, hvilket gælder størstedelen af arbejdet med de begreber man ifølge bekendtgørelserne skal arbejde med i matematikundervisningen fra omkring 7. klassetrin og frem.

Pointen er altså dels, at det er ved at kunne betragte hovedparten af de opgaver man støder på som rutinemæssige øvelser man undgår at skulle starte fra “Adam og Eva” hver gang, hvad enten det drejer sig og motoriske eller matematikprægede færdigheder. *Men* det er kun når der arbejdes med problemløsning at der sker en *udvikling* i retning af at øge antallet af

[4] Ikke at forveksle med handlinger som at trække vejret, svede osv. der er styret af det autonome nervesystem og således uden for kognitiv kontrol.

Figur 10.1 *Langt ude.* Af Gary Larson. Fra Gade (1997, p. 208).

forbindelser mellem de dannede begreber og dermed graden af relationel forståelse. Arbejde med øvelser medvirker altså i bedste fald til at *konsolidere* en eksisterende forståelse, mens problemløsning medvirker til at *skabe* ny forståelse. I forhold til dikotomien øvelsesregning-problemløsning er det således kun gennem problemløsning at man lærer noget *nyt*.

Der er altså en stor pædagogisk udfordring i at finde den rette vekselvirkning mellem øvelser og problemer for hver elev, ikke mindst når undervisningen foregår i en klasse med 25 elever der har hver deres optimale tempo for udviklingen af den relationelle forståelse.

Rækkefølgen af problemer og øvelser

Et ofte overset forhold er prioriteringen af problemer og øvelser i forbindelse med *introduktionen* af nye matematiske begreber i undervisningen. Hvis der, som det efter min vurdering ofte er tilfældet, indledes med at demonstrere begrebets brug i relation til ganske bestemte snævert afgrænsede procedurer hvorefter sikkerheden i at gennemføre disse procedurer øves, vil disse øvelser kun aktivere ganske få af de tidligere dannede begreber som grænser op hertil, og derfor kun fremme en instrumentel forståelse. Hvis der derimod indledes med at forsøge at danne relationer til mange af de allerede eksisterende begreber, vil ethvert efterfølgende forsøg på gennem øvelser at forstærke en bestemt af disse relationer ofte medføre at der reflekteres over betydningen af de øvrige, endnu kun svage relationer som derfor som en *sideeffekt* også vil blive forstærket. I dette tilfælde vil øvelserne derfor medvirke til at forstærke en allerede etableret relationel forståelse.

Med den sprogbrug jeg har indtroduceret betyder det, at relationel læring konsoliderer forståelsen af de begreber der allerede med stærkere eller svagere relationer tilhører den eksisterende semantiske struktur der aktiveres i forbindelse med en bestemt øvelse:

> "The significance og this analysis is that if understanding [brugt i betydningen *relationel* forståelse] is built initially, then the ongoing inventive process can operate on mental representations with rich associations. The results of such inventions remain connected to the network of knowledge. Thus, inventions push student's current understanding. Inventions that operate on understanding can generate new understandings, a kind of snowball effect. [...] If the argument is correct, it points to the importance of building understanding – of creating rich networks of knowledge – when a topic is first encountered." (Hiebert & Carpenter; 1992, p. 74)

Med den direkte forbindelse jeg mener der er mellem udviklingen af relationel forståelse og praktisering af problemløsning i undervisningen, er den klare konklusion herpå, at man skal *starte* enhver undervisning indenfor et nyt domæne med at løse en masse forskelligartede problemer og først herefter forstærke de dannede relationer ved hjælp af øvelser.

10.2.3 Forståelse, læring og modellering

Som afrunding på den kognitions-psykologiske analyse i kapitel 5 rundede jeg det læringsmæssige potentiale ved at arbejde med anvendelser af matematik i matematikundervisningen (jf. afsnit 5.5 på side 104). Konklusionen var at potentialet består i en anvendelsesorientering af arbejdet med at øge valensen af de matematiske begreber i spil ved at etablere meningsfulde sammenhænge mellem en ekstra-matematisk kontekst og begreber fra en matematisk formalisme.

I tråd med min placering af matematisk modellering som det mest krævende yderpunkt i spektret af anvendelsesorienterede opgaver, jævnfør omtalen i afsnit 6.2.6 (side 118f), vil den relationelle matematiske begrebsforståelse tilsvarende kunne orienteres mod anvendelsesorienterede problemstillinger der er mere eller mindre "tilpassede" en given matematisk behandling: Jo flere af de indledende aktiviteter i modelleringsprocessen der overlades til eleven, jo mere realistisk forekommende (uden for klasserummet) bliver de problemstillinger fra virkeligheden der afgrænser hvilke semantiske strukturer eleven aktiverer.

I den henseende kan selv ikke nok så veltilrettelagt problemløsning indenfor et isoleret matematisk domæne træde i stedet. Her assimileres de matematiske begreber til semantiske strukturer med et rent matematisk indhold, hvilket øger valensen af begreberne i retning af en mere sammenhængende forståelse af de *matematiske* relationer. Men der er ikke skabt nye neurale forbindelser mellem de samme begreber og semantiske strukturer aktiveret i forbindelse med *ekstra-matematiske* problemstillinger, hvorfor muligheden for at aktivere disse matematiske begreber hvis en lignende virkelig problemstilling optræder igen ikke er forbedret:

> "The empirical results show that transfer is usually quite specific and contextually bounded. That is, transfer between tasks is most apparent if there are specific external or internal elements in common and if the tasks are situated in common contexts. If the situational features of the task are considerably different and if the tasks are similar only in general ways, transfer is unlikely." (Hiebert & Carpenter; 1992, p. 75)

Der er med andre ord *ingen direkte forståelsesmæssig overførselsesværdi* mellem rent matematisk opgaveregning og kompetence i konstruktivt at aktivere matematiske begreber i forbindelse med virkeligt forekommende problemstillinger: For at blive god til at anvende matematiske begreber i ekstra-matematiske sammenhænge er det en nødvendig betingelse, at man før eller siden løser problemer der direkte udfordrer evnen til at forbinde disse begreber og sammenhænge!

Det er vigtigt at understrege, at påpegningen af manglende transfer i forbindelse med matematisk *problemløsning* kun gælder den *direkte* overførselsværdi. Enhver matematiklærer ved, at de elever der er gode problemløsere i én situation ofte også er det i en anden, anvendelsesorienteret eller ej. Det skyldes imidlertid ikke den snævert matematiske relationelle begrebsforståelse, men snarere en række (overvejende ikke-kognitive) forhold som trænes i forbindelse med problemløsning af en vilkårlig art: kompetencen til at anlægge en strategisk betragtning, kompetencen til at håndtere en truende nederlagsfølelse, kompetencen til at arbejde med samme opgave gennem længere tid, mv. Fordi forhold som disse trænes uanset problemtypen er der en klar *selvforstærkende effekt* ved at mestre problemløsning, som blot ikke må gøre at betydningen af problemløsnings-domænet overses.

For eksempel peger en sammenligning af professionelle matematikere og novicers måde at håndtere problemløsnings-situationen på, at det er den generelle tilvænning og ikke det matematiske begrebskendskab der er den afgørende forskel på de to grupper (Schoenfeld; 1992, p. 354ff.). Matematikerne har tilsyneladende aktiverbare semantiske strukturer der generelt er mindre mål-middel styrede (instrumentelle) end novicernes, hvilket gør det nemmere for dem at tænke i problemets struktur før en egentlig løsning forsøges.

Et eksempel

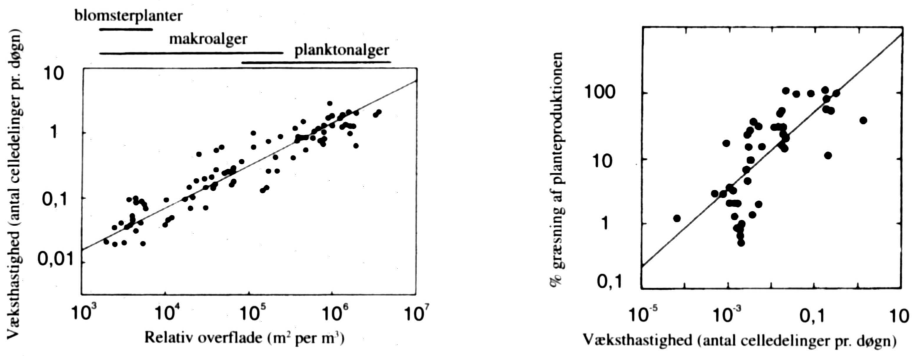
Lad mig illustrere pointen ved hjælp af en eksamensopgave og nogle elevers kommentarer til den. Det er fra den skriftlige sommereksamen i matematik på det almene gymnasiums daværende matematiske linjes obligatoriske niveau (B-niveau), anno 1998 hvor jeg som eksamensvagt overværede elevernes arbejde med opgavesættet.

Som opgaven er stillet, jf. gengivelsen i figur 10.2, er der kun *tilsyneladende* tale om træning i at knytte en række matematiske begreber til en ekstra-matematisk semantisk struktur, her fra mikro-biologiens verden. Ved at kigge nærmere på opgaveteksten kan man analysere sig frem til følgende:

- Det første spørgsmål bearbejder forståelsen af hhv. afhængig og uafhængig variabel i forbindelse med en regneforskrift for en funktion (ved at bede om at indsætte en givet værdi af den afhængige variabel), samt lægger op til træning i ligningsløsning;
- det andet spørgsmål har også hvad navngivning angår forladt biologiens verden, og opfordrer til at knytte begrebet “procentvis ændring” (alternativt: “fremskrivingsfaktor”) til en forhåbentlig eksisterende *rent matematisk* forståelse af ligningsløsning (ved at bede eleven om selv at opstille den ligning der skal løses);
- det tredje spørgsmål er også selv hvad navngivningen angår rent matematisk og bearbejder forståelsen af begrebet “sammensat funktion”, samt lægger op til træning i regning med potens-udtryk i forbindelse med ligningsløsning.

Det er således en opgave der efter min vurdering udfordrer forståelsen af en række matematiske begreber på lidt utraditionel vis, og derfor for de fleste elever vil være et problem. Som sådan er det faktisk en god og usædvanlig

De følgende figurer viser resultater fra en undersøgelse af, hvordan visse havplanter vokser og bliver spist (græsset) af mikroorganismer.



Kilde: Naturen Verden, 1996/1.

I en model, som bygger på de viste resultater, beskrives sammenhængen mellem planters væksthastighed v (antal celledelinger pr. døgn) og deres relative overflade x (m^2 pr. m^3) ved

$$v = 1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot x^{0{,}66} \ .$$

Beregn den relative overflade, der svarer til en væksthastighed på 0,1.

Beregn den procentvise stigning i v, når x stiger med 30%.

I samme model beskrives sammenhængen mellem den procentdel af planteproduktionen y, der spises, og væksthastigheden v ved

$$y = 1{,}89 \cdot 10^{2} \cdot v^{0{,}58} \ .$$

Bestem y udtrykt ved x.

Figur 10.2 Opgave 3 fra skriftlig studentereksamen i matematik på matematisk linje, obligatorisk niveau (B-niveau), maj 1998.

lidt "standard-præget" opgave, men der dannes *ingen* forbindelser mellem de indgående matematiske begreber og en ekstra-matematisk aktiverbar semantisk struktur. At jeg ikke er alene om denne vurdering antydes af, at flere elever jeg snakkede med umiddelbart efter eksamen var enige om, at det var en af de sværeste af opgaverne i eksamenssættet, men også spontant kommenterede opgaven med noget i retning af; "det var egentlig en meget god opgave, men hvorfor var de der tegninger der?"

Hvis samme datamateriale skulle bruges konsekvent til at knytte matematiske begreber til domænet "levende organismers vækst under givne ydre omstændigheder", skulle det eneste givne have været to tabeller med samhørende værdier af hhv. væksthastighed og overfladeareal og andel spiste planter og væksthastighed. Spørgsmålet kunne så blot lyde: "Undersøg om der er en systematisk sammenhængen mellem den andel af planteproduktionen der spises og planternes relative overflade. Kommentér svaret."

Det er unægtelig en sværere, men også betydelig mere meningsfuld opgave i ekstra-matematisk forstand, som man så kan "gradbøje" i forhold til faserne i modelleringsprocessen hvis man finder det passende.

10.3 En problembaseret emneorienteret kontrakt

I forhold til kursusarbejdet har det været en central del af projektet her at analysere konsekvenserne af at forsøge at bryde med en "didaktisk kontrakt" (Brousseau; 1997; Artigue; 2002) som i Blomhøj (1995) er karakteriseret ved at

a) læreren til en start gennemgår de metoder og algoritmer der er på programmet,
b) læreren herefter udelukkende stiller opgaver som eleverne nu eller tidligere har fået redskaber til at løse, hvilket med min sprogbrug betyder at de er ment som øvelser,
c) eleverne udelukkende skal forholde sig til de problemstillinger der eksplicit fremgår af de stillede opgaver,
d) elevernes læring kan bedømmes alene ud fra om de kan angive et korrekt facit til de stillede opgaver.

På alle almendannende uddannelser i Danmark er der meget i de bekendtgørelsesmæssige rammer om matematikundervisningen som kan læses som et forsøg på at undgå, at undervisningen styres af en sådan "kontrakt". Det gælder fx. hele den mundtlige dimension og traditionen for (også) at afholde mundtlig eksamen. Når karakteristikken alligevel er noget mange matematiklærere kan nikke genkendende til (selvfølgelig ikke fra deres egen undervisning (!), men enhver kan jo have sit eget yndlings-eksempel i baghovedet) skyldes det bl.a., at en undervisning med disse karakteristika er nem og rimelig ukompliceret at praktisere for både lærere og elever, og derfor fristende at forfalde til i pressede situationer.

En sådan "standardkontrakt" indeholder imidlertid ingen af de ovenfor fremførte fordringer til kursusarbejde med sigte på udvikling af matematisk modelleringskompetence, tværtimod. Som sammenfatning at disse fordringer er der brug for at formulere *en alternativ didaktisk kontrakt*, både for at gøre opmærksom på behovet for at bryde med uheldige fastgroede skikke og sædvaner og for at have et konkret alternativ at tilrettelægge på basis af.

Ankerposition 3 består således i at undervisningen i de perioder hvor der arbejdes kursusorganiseret skal stræbe efter at etablere en emneorienteret problembaseret didaktisk kontrakt karakteriseret ved at

i) arbejde med problemløsning konsekvent går *forud* for lærerstyret gennemgang,
ii) de forhold som der fra forskningsmæssig side argumenteres for karakteriserer evnen til matematisk problemløsning eksplicit gøres til genstand for undervisning,
iii) elevernes metakognitive viden forsøges udviklet ved at de selv deltager i udvælgelsen af opgavetyper med udgangspunkt i en erkendelse af problemløsning og øvelsesregnings forskellige læringsmæssige status,
iv) en betydelig del af problemløsningen udfordrer evnen til at matematisere en ekstra-matematisk problemstilling.

Del IV

Hindringer og muligheder i praksis – en didaktisk analyse

11 Introduktion til del IV

> d) Hvad er karakteren af de *hindringer* som i et konkret tilfælde stiller sig i vejen for utopien om en fuldstændig realisering af “den gode praksis” i overensstemmelse med de centrale tilrettelæggelsesmæssige karakteristika?

I denne del af afhandlingen sættes dagsordenen af spørgsmålet “hvorfor ikke?” Hvorfor *er* matematisk modellering *ikke* en central del af matematikundervisningen på de almendannende uddannelser?

Det spørgsmål gør jeg mig (som nævnt på side 21) ingen naive forestillinger om at kunne levere et udtømmende svar på. Det jeg med projektet her har gjort er at belyse problemfeltet ved at have iværksat og observeret et forsøg på i praksis at gennemføre undervisning, der både i ordet og i ånden søgte at realisere de fire ankerpositioner som jeg opstillede i forrige del af afhandlingen. Det er en sådan undervisning jeg henviser til, når jeg i forskningsspørgsmålet gengivet ovenfor snakker om “den gode praksis”.

Forud for forsøgsundervisningens gennemførelse gjorde jeg mig mange overvejelser om, hvad der mon ville vise sig at være de væsentligste typer af hindringer for realiseringen af “den gode praksis” (jf. Jensen; 1999):

Ville det mon være modvilje i visse dele af det politiske system af praktiske og/eller ideologiske grunde? Eller begrænsninger som følge af de praktiske omstændigheder undervisningen ville være underlagt? Ville det være de deltagende læreres manglende evne og/eller vilje til at gennemføre undervisningen i overensstemmelse med ankerpositionerne? Eller elevernes ditto? Ville en væsentlig hindring bestå i manglende formåen til at få den eksisterende didaktiske indsigt om forsøgets centrale elementer ud til dem der skulle bruge den? Eller ville det vise sig at det allerede i udgangspunktet var et dødfødt projekt, fordi analysen bag de påståede potentialer er galt tænkt? Eller måske ville de væsentligste sten på vejen ligge et sted som ikke falder ind under nogen af disse kategorier?

I de to næste kapitler henholdsvis karakteriserer og analyserer jeg i tilbageblik den gennemførte forsøgsundervisning med henblik på at kunne udpege hvad jeg i dette konkrete tilfælde mener var de væsentligste ingredienser i et svar på spørgsmålet “hvorfor ikke?” Inden da vil jeg nedenfor analysere nogle metodiske forhold omkring det at gennemføre forsøgsundervisning som har været med til at afgrænse forskningsprojektet som helhed og derfor er væsentlige at få klargjort.

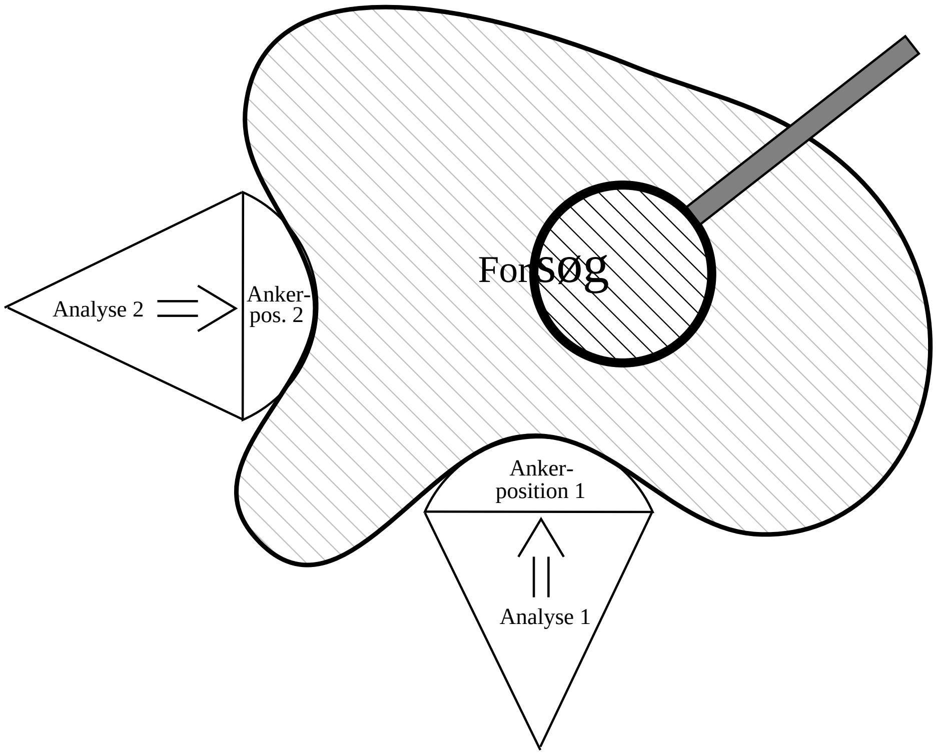
11.1 Den "omvendte" determinismefælde

Forsøgsbaserede undersøgelser har en cyklus som jeg mener man i første omgang meningsfuldt kan dele op i faserne etablering, gennemførelse og efterbearbejdning – uanset om genstandfeltet for forsøget er undervisning, fysik, medicin eller noget helt andet. Etableringen handler om at skabe en ramme om forsøget, herunder at beslutte sig for hvilke karakteristika – hvilke "deformeringer" af rammen – man anser som særligt vigtige i forhold til målet med forsøget. Under og efter forsøgets gennemførelse kan man så "sætte lup" på udvalgte aspekter, herunder en eventuel forbindelse tilbage til de deformeringer man omhyggeligt påførte forsøgsrammen, jf visualiseringen af denne beskrivelse i figur 11.1.

Etablerings- og efterbearbejdningsfaserne inviterer til det man med reference til forsøgets gennemførelse kan kalde henholdsvis præ- og post-analyse. Metodisk set spiller de en vidt forskellig rolle: Præ-analysen *danner grundlag* for etableringen af forsøgsrammerne mens post-analysen handler om *konsekvenserne af* disse rammer.

Denne forskellighed medfører en metodisk begrænsning som har forbindelse til det jeg i afsnit 8.1.1 (side 136ff) kaldte *determinismefælden*. Her introducerede jeg begrebet som betegnelse for det at arbejde ud fra en hypotese om, at der analytisk set kan sættes implikationstegn fra teoretiske studier af undervisning til det læringsmæssige udbytte af at deltage heri. I forhold til det at gennemføre forsøg svarer det til en forestilling om at man kan "diktere" bestemte (ønskede) forsøgsresultater ved at være tilstrækkeligt omhyggelig med præ-analysen. Det forestiller jeg mig må være en rimelig ambition af have indenfor visse dele af eksperimentel fysik og medicin, men med fokus rettet mod en så "uregerlig" og indeterministisk størrelse som undervisning er det en naiv og fordummende tilgang til videnskab.

Den "omvendte" determinismefælde handler om at overse de metodiske begrænsninger ved post-analysen af forsøgsresultaterne. Fokus er her rettet mod dels at forstå de resultater som forsøget har genereret, dels at identificere på hvilken måde og i hvilken grad disse resultater er et resultat af forsøgsrammens karakteristika. Motivationen for at det er netop disse karakteristika forsøget er underlagt er derimod ikke en del af post-analysen. En forståelse heraf udgør en selvstændig og epistemologisk set uafhængig



Figur 11.1 En visuel model af forsøgsundervisning som didaktisk virkemiddel.

del af præ-analysen, hvilket er vigtigt at være opmærksom på for at undgå analytiske "kortslutninger". Hvis man – jf. figur 11.1 – med "luppen" i hånden er på udkig efter konsekvenserne af nogle påførte deformeringer af en forsøgsramme, kan man ikke i samme ombæring dissekere de "vaffelis" som har afstedkommet disse deformeringer.

Konkret betyder det, at jeg i denne del af afhandlingen, hvor jeg analyserer *resultaterne af* den gennemførte forsøgsundervisning, ikke trækker tråde tilbage til motiveringen og systematiseringen i del I og II. I stedet holder jeg mig bevidst til at fremlægge min forståelse af hvad der rent faktisk fandt sted, og min analyse af forbindelserne mellem dette hændelsesforløb og de fire ankerpositioner som var med til at indramme det.

11.2 Et snævrere fokus

11.2.1 Fokus på det almene gymnasium

Den virkelighed jeg valgte at lade forsøgsundervisningen udspille sig i, var som nævnt flere gange tidligere det almene gymnasiums matematikundervisning. Dette valg er udtryk for to former for nødvendig indsnævring af undersøgelsens fokus (jf. afsnit 2.1.1 på side 13ff).

Hidtil har analysen således kun været specifik med hensyn til fokuset på de matematikholdige almendannende uddannelser. Med fokuseringen på det almene gymnasium er der nu – som den første form for indsnævring – kun tale om analyse af én af disse uddannelser. Den anden form for indsnævring af fokus består i, at jeg kun eksperimenterer med *almendannende matematikundervisning*, der betegner den del af undervisningen på de matematikholdige almendannende uddannelser hvor der står matematik på skemaet.

11.2.2 Fokus på én klasse

Konkret drejede forsøgsundervisningen, som blev gennemført i perioden 2000-2002, sig om et alternativt to-årigt forløb til obligatorisk niveau i matematik på den daværende matematiske linje i det almene gymnasium. Én klasse med en lærer og 25 elever deltog i forsøget, som karakteriseres nærmere i næste kapitel.

Tilgangen med fokus på kun én klasse som følges gennem en længere periode, giver logisk set mulighed for to forskellige slags resultater. *For det første* kan jeg pege på nogle forhold, som i dette forsøg udgjorde en hindring for at "den gode praksis" til fulde blev en realitet, og analysere disse hindringers mulige forbindelse med de opstillede ankerpositioner for undervisningens tilrettelæggelse og afvikling. Det er blevet til fremhævning af fire forskellige typer hindringer som sammen med den ledsagende analyse udgør kapitel 13.

For det andet kan jeg pege på forhold som var en succes i forhold til idealet om "den gode praksis". Det sker på to niveauer: Dels et praksisnært niveau som refererer til elevernes konkrete udbytte af forsøgsundervisningen, dels et mere overordnet strukturelt niveau som refererer til forsøgsundervisningens tilrettelæggelse. Fortællingen om disse succesfulde sider af forsøget en en del af de fremadrettede refleksioner og forslag i kapitel 14 som afrunder afhandlingen.

11.3 Projektets dobbeltrettethed

En af mine bestræbelser med projektet her har været at gøre det både forskningsmæssigt og praktisk/uddannelsespolitisk relevant, jf. omtalen i kapitel 1. Denne dobbelte bestræbelse har – jf. introduktionerne til de andre dele af afhandlingen – haft mange metodiske konsekvenser for forsøget som helhed, hvoraf jeg her vil omtale to som har været væsentlige for forsøgsundervisningens tilrettelæggelse og gennemførelse.

11.3.1 Om tidsperspektivet

Det forsknings- og udviklingsmæssige sigte med projektet trækker umiddelbart i hver sin retning med hensyn til forsøgsundervisningens tilrettelæggelse og omfang. Forskningsmæssigt bliver forsøgsundervisning metodisk set mest "håndterbart" hvis der er tale om et så kort forløb at man indholdsmæssigt kan fastholde et valgt fokus hele vejen igennem og ressourcemæssigt kan overkomme at analysere alle de fremkomne data i detaljer. Samtidig er disse karakteristika med til at gøre kortvarig forsøgsundervisning urealistisk snævert i et udviklingsperspektiv. Med udviklingspotentiale for øje vil det alt andet lige være hensigtsmæssigt at tilrettelægge forsøget med respekt for den fokusmæssige kompleksitet og tidsmæssige udstrakthed som karakteriserer al undervisning, men det er samtidig et træk i retning af forskningsmæssig "uhåndterbarhed".

Dette skisma er jeg overbevist om er en af de væsentlige årsager (de forskningsmæssige ressourcer er en anden) til at forsøgsundervisning med et langt tidsperspektiv forskningsmæssigt er underbelyst indenfor matematikkens didaktik i almindelighed og i forhold til analyser med fokus på matematisk modellering i særdeleshed, jf. Niss (2001b) og Galbraith & Clatworthy (1990). Denne underbelysning mener jeg rummer en betydelig forklaringskraft i forhold til at forstå og arbejde med det vel nok største problem indenfor matematikkens didaktik; afstanden mellem den forskningsmæssige viden og den undervisningsmæssige praksis.[1]

Jeg mener således der er gode grunde til at vælge et langt tidsper-

[1] At denne kløft eksisterer, er man helt klar over i forskerverdenen. Et af de centrale problemfelter indenfor matematikkens didaktik som videnskabelig disciplin angår netop spørgsmålet om hvordan man bedre sikrer et konstruktivt samspil mellem teori og praksis.

For eksempel eksisterer der en international gruppe af forskere, *The SCTP Group* (Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education), der på initiativ af danskeren Bent Christiansen siden 1984 jævnligt har afholdt konferencer og udgivet tilhørende rapporter. Se evt. forordet i Bazzini (1994), som er den femte i rækken, for en nærmere præsentation af ideen bag dette initiativ. Blomhøj (1992b) rummer en generel diskussion af teori vs. praksis i matematikkens didaktik.

spektiv når man skal tilrettelægge forsøgsundervisning som indgår i en forskningsproces, hvilket jeg altså med det toårige gymnasiale forløb også valgte at gøre. De forskningsmetodiske vanskeligheder det medfører har jeg så forsøgt at vende til udfordringer, som det i udviklingens navn har været en central del af forskningen at arbejde med.

11.3.2 Om karakteren af samarbejdet mellem forsker og praktiker

Jeg har en oplevelse af at forskning indenfor matematikkens didaktik har svært ved at fremkomme med resultater som *reelt* medvirker til forbedringer af undervisningens praksis, hvis ikke forskningsprocessen bygger på aktiv deltagelse af lærere og administratorer.[2]

I den sammenhæng er en af fordelene ved at medindtænkte undervisningen som helhed i forsøget at det imødekommer lærerens dagsorden. Udover sin pædagogiske interesse for helheden i skoleforløbet er han/hun jo både moralsk og juridisk forpligtet på at tage hånd om det samlede undervisningsforløb lige fra opstart til den summative evaluering ved udgangen, ikke kun de enkeltelementer som man ud fra en forskningsinteresse kunne være interesseret i at kigge isoleret på og koncentrere kræfterne om.

Ved på denne vis at skabe et interessefællesskab og generelt vise imødekommenhed overfor læreren som samarbejdspartner bliver det muligt at etablere den form for samarbejde mellem forsker og praktiker, som Wagner (1997, p. 15) med reference til udannelsesforskning generelt kalder et *klinisk partnerskab* og karakteriserer ved følgende forhold (Ibid., p. 17, min oversættelse):

Fokalt forskningsspørgsmål: Hvordan kan praktikere og forskere arbejde sammen for at forbedre viden om skolegang og praksis i skolerne?

Forskningsproces: Systematisk undersøgelse tilrettelagt og rapporteret af forsker og praktiker i fællesskab.

Kontekst og ståsted: Forskeren står udenfor skolesystemet og er involveret i refleksion; praktikeren er indenfor skolesystemet og er involveret i handling og refleksion.

Model til at stimulere forandring: Forskere og praktikere gennemfører i samarbejde forskning vedrørende problemer i tilknytning til praksis for at hjælpe praktikere med at forbedre deres egen effektivitet.

Ekspertroller: Forskeren er forsker og samarbejdspartner; praktikeren er praktiker og samarbejdspartner.

[2] Ifølge Wagner (1997) er den beskedne andel af projekter med en sådan aktiv deltagelse af “praktikere” et ofte hørt kritikpunkt af uddannelsesforskning generelt.

To forhold som går lidt på tværs af denne punktopstilling, er så centrale at de fortjener at blive uddybet. Det drejer sig dels om hvad der undersøges og af hvem, dels om hvilken form for kommunikation der er med til at skabe grundlaget for en ændret praksis (ibid, p. 15):

> "The researcher is clearly the agent of inquiry, and practitioners are the people whose work is the focus of analysis and reform. But practitioners can also engage in inquiry, at least by assisting their researcher colleagues, and attention is given by both to the process of researcher-practitioner consultation itself.[3] Thus, while the researcher remains outside the schools and practitioners inside, both researchers and practitioners are also engaged in *jointly defined work* that cuts across those two domains. As a result, clinical partnership may acknowledge, in addition to the separate expertise of researchers and of practitioners, the value of special skills in research-practice collaboration or clinical research.
>
> Within the clinical mode, the value of research to stimulating change and improvement in schools is grounded in direct communication between researchers and practitioners about problems and issues. Knowledge generated through this kind of research may be reported to other researchers and to policymakers, but it can also be reported to practitioners, either during or after the conduct of research itself [. . .]. Within efforts to improve their own effectiveness, or so the argument goes, this research-generated knowledge represents a resource to practitioners themselves."

Jeg kendte ikke til Wagners typificering af samarbejdsformer mellem forskere og praktikere indenfor undervisningsverdenen da jeg startede det her beskrevne projekt, men det kliniske partnerskab svarer – på trods af den efter min mening uheldige navngivning – temmelig nøjagtigt til den form for samarbejde som jeg i udgangspunktet gerne ville etablere.

[3] I artiklen introduceres to andre typer samarbejde. Ifølge Wagner selv (p. 16) adskiller de tre typer sig især fra hinanden med hensyn til hvem der har rollen af hhv. *den undersøgende* (agent of inquiry) og *den undersøgte* (object of inquiry).

Her – i et "clinical partnership" – er forsker og praktiker altså i fællesskab de undersøgende, med praktikeren og det system – fx et klasserum eller en skole – han/hun i forskningsprojektet betragtes som en del af, som det der undersøges.

I en "data-extraction agreement" opretholdes den klasssiske arbejdsdeling: Forskeren undersøger praktikeren.

I en "co-learning agreement" er forsker og praktiker begge både de undersøgende og de undersøgte. Det er altså både praktikerens og forskerens miljø (typisk henholdsvis skole og universitet) og deres respektive virke heri, der er i fokus.

12 Afprøvning i praksis: Karakteristik af et forsøg

I dette kapitel karakteriserer jeg den forsøgsundervisning i matematik som en klasse på Allerød Gymnasium gennemførte fra sommeren 2000 til sommeren 2002 – det jeg både her og i andre sammenhænge refererer til som Allerød-forsøget.

Karakteristikken er skrevet med tanke på udfyldelse af to funktioner. Den ene er at give indsigt i den eksperimentelle del af det grundlag som analysen i næste kapitel hviler på. Herved skulle det gerne blive nemmere for andre end os der var til stede at tænke med og forholde sig kritisk til denne analyse.

Den anden funktion er at fremlægge historikken bag forsøgsundervisningen, hvilket tjener to formål: Dels bliver det herved muligt i det afsluttende kapitel at pege på nogle forhold som godt kunne have udgjort en sten på vejen men ikke gjorde det, dels kan andre forhåbentlig bruge mine erfaringer som konkret inspiration til at igangsætte længerevarende forsøgsundervisning, hvilket der som tidligere nævnt (side 179) kan være god brug for.

12.1 Etableringen

Etableringen af Allerød-forsøget havde to delvist overlappende faser. Den ene bestod af den generelle del af præ-analysen (jf. side 176) som gødede jorden for – men ikke var specifikt rettet mod – gennemførelsen af et konkret undervisningsforløb. Denne fase blev indledt i sommeren 1996 med igangsættelsen af mit (og min specialemakker Per Gregersens) specialestudie i matematikkens didaktik ved IMFUFA, Roskilde Universitetscenter (jf. omtalen på side 15 og side 28).

Med afbrydelser undervejs stod dette analysearbejde på frem til sommeren 1999, men det skiftede karakter i september 1998 da jeg skiftede status fra specialestuderende til ph.d.-stipendiat. Den forlængede tidshorisont gjorde det muligt at begynde at arbejde mere konkret med ideen om at gennemføre længerevarende forsøgsundervisning som en central del af det igangsatte forskningsprojekt. Hermed skiftede fokus fra systematisering til didaktificering, jf. fremlæggelsen i del II og III af disse to faser i præ-analysen, og parallelt hermed indledtes det målrettede, helt nødvendige men ofte oversete projektmagerarbejde som udgjorde anden fase af etableringen af forsøgsundervisningen.

12.1.1 Initiativet og det nødvendige møde

I begyndelsen af 1999 begyndte jeg at tage konkret initiativ til den planlagte forsøgsundervisning i det almene gymnasium. I den forbindelse var det afgørende for mig at få det etableret som et samarbejdsprojekt, jf. omtalen i afsnit 11.3.2 (side 180), og dermed blev det en nødvendig betingelse for succes at jeg var i stand til at finde en eller flere gymnasielærere at samarbejde med.

Relativt hurtigt, efter at have ringet og mailet til den halve snes gymnasiematematiklærere jeg kendte godt nok til at henvende mig direkte til om den slags, fik jeg positivt tilsagn fra Erik von Essen fra Himmelev Gymnasium ved Roskilde. Jeg søgte dog videre efter endnu en samarbejdspartner, fordi jeg gerne ville starte forsøget i to klasser med hver deres lærer. Det mente jeg dels ville øge chancen for at der blev noget interessant for mig at observere på, dels kunne jeg muligvis lave komparative studier af de to klasser, og så ville Erik gerne have en eller flere lærerkolleger at sparre og dele noget af det konkrete udviklingsarbejde med.

Samarbejdspartner nummer to viste sig at være sværere end som så at finde. Alle jeg spurgte direkte var interesserede i projektet – det var bl.a. på en formodning herom at jeg spurgte netop dem – men sagde nej på grund af manglende ork. Det havde og har jeg fuld forståelse for, da det jeg bad dem om ikke var småting: Som deltagende lærer skulle man bl.a. deltage i arbejdet med at udvikle en forsøgsbekendtgørelse og nye standardopgaver (jf. omtalen nedenfor), loyalt engagere sig i at undervise på en måde der bevidst brød med en række vante rutiner, lade mig deltage i beslutninger om undervisningens tilrettelæggelse og løbende justering samt ikke mindst åbne døren til sit klasserum for mig og mit videokamera. Efter nogen rådvildhed lykkedes det dog at etablere den ønskede kontakt mellem mig og endnu en interesseret lærer. Vejen hertil viste sig at være at kontakte gruppen af gymnasielærere igen en efter en (så jeg ikke risikerede pludselig at have sat flere skibe i søen end jeg var interesseret i og kunne magte) og bede dem viderebringe en projektbeskrivelse og et brev fra mig til deres matematikkolleger på skolen, hvor jeg spurgte om nogen af dem var interesserede i at medvirke.

På Allerød Gymnasium i Nordsjælland var der bingo. Midt på sommeren 1999 meldte en af matematiklærerne, Karsten Wegener, sig som interesseret. Han havde længe oplevet en frustration i stil med den jeg beskrev i kapitel 1, som med hans ord lød noget i retning af: "Hvorfor er rammerne omkring matematikundervisningen skruet sammen på en måde, så jeg ender med at bruge størstedelen af tiden på at undervise i ren matematik, når det eleverne efter min vurdering har brug for – og det jeg har lyst til – er at undervisningen fokuserer på at anvende matematik?" Han havde derfor længe haft lyst til at dreje sin matematikundervisning i den retning jeg skitserede i projektbeskrivelsen, og da vi mødtes kunne vi vist begge to hurtigt fornemme, at der både på det interessemæssige og det personlige plan var basis for et samarbejde.

I sensommeren 1999 lykkedes det så vores tre mand store projektgruppe at udvikle og blive enige om rammerne for et forsøgsprojekt som tilfredsstillede vores respektive interesser i en grad, så der var grundlag for at konkretisere arbejdet og søge Undervisningsministeriet om lov og midler til at føre projektet ud i livet. Det centrale dokument i den forbindelse var forsøgsbekendtgørelsen (appendiks A), som vi skrev i løbet af det tidlige efterår 1999 og i oktober indsendte til Undervisningsministeriet ledsaget af en motiverende tekst[1].

12.1.2 Forsøgsbekendtgørelsen

Forsøgsbekendtgørelsen, som er gengivet som appendiks A (side 263ff), er et alternativt bud på det lovmæssige grundlag for et fuldt forløb til gymnasialt B-niveau i matematik. I den tre mand store forfattergruppe forsøgte vi at udforme teksten så den lever op til følgende fordringer: Formmæssigt skulle den svare til vores forestilling om "fremtidens matematikbekendtgørelse", den skulle være realistisk og interessant at arbejde ud fra som lærer, tage de nødvendige praktiske hensyn og – set fra et forskningsperspektiv ikke mindst – respektere de fire ankerpositioner som jeg på forhånd havde formuleret og undervejs i processen fik opbakning til i gruppen, og som jeg efterfølgende har skrevet ind i en analytisk ramme i denne afhandlings del III.

Nedenfor vil jeg kommentere på bekendtgørelsens struktur og udvalgte dele af dens indhold, og så i forbindelse med de efterfølgende afsnit vende tilbage til nogle af de mere konkrete passager i teksten.

[1] Jensen (2000a), som danner baggrund for hele afsnit 12.1.2, er en gennemskrevet udgave heraf.

“Identitet og formål” og “Undervisningsmål”

Begge disse afsnit i bekendtgørelsen er skrevet ud fra den tanke, at de kan udgøre det fælles grundlag for al gymnasial matematikundervisning. De enkelte niveauer og specialiseringer (hf, stx, hhx og htx) kan så indholdsmæssigt være karakteriseret ved valget af kerneområder og en forskellig vægtning af de enkelte undervisningsmål.

Derudover er afsnittet “Identitet og formål” med for at give et nyt bud på alle dele af bekendtgørelsen, samt for at tilkendegive hvilken opfattelse af matematik som undervisningsfag der har været med til at bestemme udseendet af de øvrige dele.

Hvad angår undervisningsmålene er der ikke ændret gennemgribende på de overordnede mål. De har målene på B-niveau i den dengang gældende 1999-bekendtgørelse (jf. gengivelsen heraf i afsnit 4.4.4 (side 63f)) som ægte delmængde, og er i øvrigt formuleret på rimelig traditionel vis, jf. gengivelsen af formålene fra en række nyere gymnasiale matematikbekendtgørelser i afsnit 4.4 (side 59ff). Vi kunne sagtens tilslutte os de gældende mål og ville markere, at det var andre dele af bekendtgørelsen der for alvor trængte til at blive reformeret.

Det handlede ikke mindst om indførelsen af delmål som et helt nyt element i bekendtgørelsen. Da vi – som den bekendtgørelsesmæssige efterlevelse af ankerposition 2 (side 156) – lavede de faglige kompetencebeskrivelser som delmålene består af, var det på basis af analysen fremstillet i kapitel 9 og således primært et forsøg på at udnytte kompetencebegrebets potentiale som kommunikationsværktøj, jf. afsnit 6.4 (side 123ff). Det centrale var at etablere en bekendtgørelsesmæssig struktur hvor udvikling af matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence (som ægte delmængde af matematisk problembehandlingskompetence) kunne formuleres som centralt placerede undervisningsmål.

Først senere – i forlængelse af etableringen af KOM-projektet (jf. afsnit 4.6.2 (side 82ff)) – viste det sig, at et mere generelt udviklingsmetodisk perspektiv på arbejdet med de faglige kompetencer potentielt udgjorde en central del af det kombinerede forsknings- og udviklingsprojekt. På grund at sit præmature forhold til KOM-projektet er projektet her mig bekendt det første forsøg på at indarbejde faglige kompetencebeskrivelser som omdrejningspunkt for læreplansudformning (og efterfølgende udvikling af undervisningen) og systematisk analysere konsekvenserne heraf. Som konsekvens af den megen opmærksomhed denne side af projektet siden har fået vil jeg derfor give kompetencebeskrivelserne i forsøgsbekendtgørelsen nogle ekstra ord med på vejen.

Om de faglige kompetencebeskrivelser

Det primære udgangspunkt for denne del af forsøgsbekendtgørelsen var den første artikel om faglige kompetencebeskrivelser af Mogens Niss (1999b) som KOM-projektet tog afsæt i og som han skrev parallelt med at jeg diskuterede mine overvejelser om kompetenceformuleringer med ham. Desuden diskuterede jeg sagen med Morten Blomhøj, baseret på nogle upublicerede foredragstransparenter hvor han elaborerede på Mogens Niss' bud på et sæt af matematikfaglige kompetencer.

I forsøgsbekendtgørelsen opereres der med med en opsplitning i indsigts- og handlekompetencer, svarende til det der i Niss (1999b) betegnes kompetencer af henholdsvis første og anden orden. I KOM-rapporten (Niss & Jensen; 2002) er denne opsplitning fastholdt, men sprogbrugen er ændret for at markere at begrebet kompetence forstås som noget der altid er orienteret mod handling i bred forstand, jf. omtalen af min begrebsforståelse på side 123ff. Begrebet handlekompetence er udtryk for redundans og betegnes i KOM-rapporten derfor blot kompetence, mens den første kategori (uanset om man kalder den indsigtskompetence eller kompetence af første orden) ikke betegner kompetencer men noget mere overordnet som vi i KOM-rapporten valgte at betegne former for overblik og dømmekraft.

De tre former for overblik og dømmekraft i forsøgsbekendtgørelsen (hvor de altså betegnes indsigtskompetencer) er identisk med dem i Niss (1999b) og i KOM-rapporten. I den dengang gældende 1999-bekendtgørelse (Undervisningsministeriet; 1999) optræder de tre former for overblik og dømmekraft som såkaldte aspekter (som Mogens Niss da også var en af fadderne til, jf. Hermann & Hirsberg (1989)), jf. gengivelsen heraf i afsnit 4.4.4 (side 63f)). Bekendtgørelsesmæssigt var der altså her tale om at rykke noget eksisterende gevaldigt op i rækkerne.

Karakteristikken af den anden kategori – de egentlige kompetencebeskrivelser – er derimod ny i bekendtgørelsessammenhæng. Overordnet er der malet med samme pensel som i Niss (1999b) og KOM-rapporten, men der er dog nogle markante forskelle. De blev lavet med tanke på, at det mest centrale ved at arbejde med faglige kompetencebeskrivelser i læreplanssammenhæng (i modsætning til i KOM-projektet) ikke er at lave et analytisk generaliserbart begrebsapparat, men et begrebsapparat som er operationaliserbart som planlægnings- og kommunikationsværktøj for de aktører som skal arbejde med læreplanen, jf. omtalen på side 123 af kompetencebeskrivelsers forskellige potentialer.

Den forskel som er væsentligst for projektet her er Allerød-bekendtgørelsens opdeling af KOM-modelleringskompetencens produktive og undersøgende sider; her handler modelleringskompetence kun om selv at kunne gennemføre en modelleringsproces, mens det at gå kritisk undersøgende til værks i forhold til andres brug af matematisk modellering er forsøgt tænkt ind i den anvendelseskritiske kompetence. Det væsentligste argument herfor var og er de forskellige former for orkestrering af undervisningen som de to aspekter af arbejde med matematisk modellering kræver (jf. diskussionen i afsnit 9.2.1 (side 147f)) og det deraf følgende behov for tilrettelæggelsesmæssigt at kunne orientere sig i to synligt forskellige retninger. Herudover får en opsplitning i to separate kompetencer KOM-modelleringskompetencen til at "fylde mere" i den samlede kompetencebeskrivelse og dermed – kan man formode – også i lærernes bevidsthed.

Tankegangskompetence, som er en del af kompetenceviften i både Niss (1999b) og KOM-rapporten, blev omvendt set bortintegreret i strukturel kompetence, som skulle forsøge at samle – og dermed også nedtone i det samlede billede – de dele af målbeskrivelsen der har at gøre med matematik som videnskabeligt fagområde. Argumentet herfor var og er dels at en sådan nedtoning er ønskelig og nødvendig hvis man som jeg vil skabe mere rum til arbejdet med modelleringskompetence, dels at jeg oplever tankegangskompetence som svær at operationalisere i grundskole- og gymnasiesammenhæng.

Symbol- og formalismekompetence blev til symbolbehandlingskompetence for at tydeliggøre at vægten i gymnasiet ligger på symbolbrug og -forståelse, jf. karakteristikken af de forskellige aspekter af symbol- og formalismekompetence i KOM-rapporten (Niss & Jensen; 2002, p.). Dermed fik det at arbejde bevidst med formalismer samme ublide medfart som tankegangskompetencen og blev forsøgt indfanget i den strukturelle kompetence.

Repræsentationskompetencen er heller ikke med i Allerød-bekendtgørelsens kompetencevifte. Det kan jeg ikke begrunde endsige forsvare, hverken med argumenter fra dengang eller fra nu, men må blot her i tilbageblik lidt forundret konstatere at sådan blev det.

Pensumbeskrivelsen

På et afklaringsmøde tidligt i processen – inden Karsten Wegener var kommet på banen – med Undervisningsministeriets to daværende fagkonsulenter for det almene gymnasiums matematikundervisning fik Erik von Essen, Mogens Niss, der som min ph.d.-vejleder også deltog i mødet, og jeg at vide, at der var en præmis for godkendelse af forsøgsbekendtgørelsen: Efter afslutningen på det toårige forløb til B-niveau skulle det være muligt for de deltagende elever at fortsætte på det daværende etårige forløb til A-niveau i matematik i 3.g. Pensumbeskrivelsen – karakteristikken af det faglige stof som det var obligatorisk at eleverne skulle arbejde med – måtte derfor ikke udelade stofområder som var forudsat kendt i pensumbeskrivelsen for det etårige forløb til A-niveau. I praksis betød det, at af de fem stofområder i 1999-bekendtgørelsen[2] var det kun statistik og sandsynlighedsregning der eventuelt helt kunne udelades af pensumbeskrivelsen.

Det havde vi imidlertid ikke lyst til, da vi anså dette stofområde som velegnet at bringe i spil i forbindelse med det ønskede fokus på matematisk modelleringskompetence. Omvendt var det en central del af forsøget at reducere det omfangsrige pensum i 1999-bekendtgørelsen for at skabe rum til udvikling af relationel forståelse af de mest centrale begreber og til det ønskede fokus på udvikling af de centrale matematikfaglige kompetencer, jf. analysen i kapitel 9.

Resultatet blev – som gengivet på side 265 – at den overordnede karakteristik af de fem stofområder i 1999-bekendtgørelsen ord til anden blev kopieret ind i forsøgsbekendtgørelsen, men uden de uddybende og temmelig detaljerede beskrivelser af forventningerne til arbejdet med hvert stofområde som Erik og Karsten mente var den tidsmæssigt mest belastende del af 1999-pensumbeskrivelsen.

I den mere kontante ende resulterede pensumafgrænsningen i, at det antal sider som skulle opgives som del af grundlaget for den afsluttende summative evaluering, blev halveret fra de normale 280-440 sider til 140-220 sider, jf. forsøgsbekendtgørelsens omtale heraf gengivet på side 267.

Eksamen

Den afsluttende eksamen beskrives i forsøgsbekendtgørelsen som bestående af de samme tre dele som i 1999-bekendtgørelsen; en mundtlig eksamen med forberedelse og en skriftlig eksamen i to dele – en kortere del uden hjælpemidler og en lidt længere del med hjælpemidler. Begrundelsen for dette valg var, at vi så en fordel i at fastholde en struktur som mange matematiklærere kan genkende og føler sig fortrolige med, og at vi mente at man med de tre elementer i den eksisterende eksamen godt kan imødekomme det der var vores centrale bestræbelse: At give eleverne mulighed for at demonstrere i hvilken grad de har udviklet de målsatte faglige kompetencer – ikke mindst matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence – samt om de er fortrolige med de centrale begreber og færdigheder indenfor pensumbeskrivelsens fem stofområder (Stephens & Money; 1993).

Den mundtlige eksamen skulle primært “tage sig af” at evaluere udbyttet af projektarbejdet, jf. første del af ankerposition 4 (side 139). Eksa-

[2] Tal, geometri, funktioner, diffferentialregning og – angivet som et samlet stofområde – statistik og sandsynlighedsregning.

mensopgivelserne skulle derfor have (en del af) elevernes projektrapporter som centralt element. Når opgivelserne herudover også skulle omfatte halvdelen af det læste pensum (jf. beskrivelsen gengivet på side 267) var det for at give eksaminator mulighed for at inddrage spørgsmål hertil, hvis det skulle vise sig at være naturligt i forbindelse med diskusssionen af den udtrukne projektrapport eller hvis det var påkrævet for at perspektivere en rapport der ikke var fyldestgørende eller måske viste sig slet ikke at være der.

Den skriftlige eksamen uden hjælpemidler skulle hvad formen angår være uændret i forhold til den tilsvarende del af den daværende skriftlige eksamen; en separat prøve af en times varighed umiddelbart inden prøven med hjælpemidler. Denne del af den samlede eksamenspalet skulle have fokus på de centrale faglige færdigheder i pensumbeskrivelsen; ligningsløsning, trigonometriske beregninger, regning med potenser, reduktion af bestemte former for algebraiske udtryk, etc.

Den skriftlige eksamen med hjælpemidler skulle – jf. anden del af ankerposition 4 – som et centralt træk lægge op til matematisk problemløsning. I den forbindelse havde vi en formodning om, at det ville være muligt at udvikle opgavetyper som er velegnede til at evaluere udviklingen af både problemløsnings-, symbolbehandlings- og ræsonnementskompetence. Mere konkret var det tanken at opgavesættet skulle bestå af såvel rene matematiske problemstillinger som matematiserings-problemstillinger der lægger op til at arbejde med faserne c), d) og e) i modelleringsprocessen (jf. karakteristikken på side 114f), i begge tilfælde med en bevidst spredning i graden af åbenhed i forbindelse med formuleringen af den enkelte problemstilling (Kleijne & Schuring; 1993). Formsmæssigt var vores overvejelser primært rettet mod at forsøge at undgå tidspres, da det ville være i direkte modstrid med ønsket om at teste elevernes kompetencer i forbindelse med problemløsning. I forsøgsbekendtgørelsen resulterede det i at eksaminationstiden blev øget fra de dengang normale tre timer til fire timer.

Hvordan eksamen konkret endte med at blive afviklet vender jeg tilbage til i afsnit 12.4 (side 205f) om evalueringen af elevernes formåen.

12.2 Forarbejdet

Omkring årsskiftet 1999/2000 blev forsøgsbekendtgørelsen godkendt af Undervisningsministeriet helt uden sværdslag. Det blev eksplicit begrundet med at man på det tidspunkt var meget interesseret i større forsøg som "opvarmning" til den gymnasiereform man vidste var på vej, men min vurdering er at en væsentlig medvirkende grund til den næsten betingelsesløse godkendelse var at de rammer og det fokus vi ville give forsøgsundervisningen harmonerede med både det omgivende samfunds og matematikersamfundets (herunder matematiklærernes) forestillinger om den ønskede udvikling af matematik som undervisningsfag, jf. analysen i kapitel 4.

Med forsøgsbekendtgørelsens godkendelse var forsøgsprojektet også formelt etableret og forarbejdet frem mod den forventede start på undervisningen i august 2000 kunne tage fart.

12.2.1 Undervisningsforløbets struktur

Dette arbejde handlede i det væsentlige om to ting: At finde en model for hvordan projekt- og kursusarbejdet skulle vekselvirke, jf. analysen af disse begreber i del III, og at udvikle en samling af nye opgaver som Erik og Karsten kunne bruge som ressource i deres daglige tilrettelæggelse af forsøgsundervisningen. I arbejdet med begge disse udfordringer kom den væsentligste inspiration fra vores og andres erfaringer med at inddrage matematisk modellering som en del af matematikundervisning.

Modellering i matematikundervisningens praksis

Man kan forestille sig mange modeller for hvordan arbejde med matematisk modellering tilrettelæggelsesmæssigt kan inddrages i matematikundervisningen (jf. Gregersen & Jensen; 1998, p. 168ff). Werner Blum og Mogens Niss forsøgte først i 1990'erne at inddele alle de muligheder der på daværende tidspunkt havde været fremme, i nogle få hovedkategorier, og nåede frem til følgende overordnede tilgange (Blum & Niss; 1991, pp. 60-62, min lettere redigerede oversættelse):

Den adskilte tilgang. Arbejde med modellering foregår i separate kurser adskilt fra den traditionelle matematikundervisning der derfor ikke behøver blive påvirket af inddragelsen af modellering.

Den todelte tilgang. Matematikundervisningen er adskilt i to dele. Første del er et traditionelt kursus i "ren" matematik, der så i anden del forsøges anvendt på mere eller mindre realistiske problemstillinger.

Ø-tilgangen. Matematikundervisningen er tilrettelagt som flere succesive forløb der alle er styret af den todelte tilgang. Herved får tilrettelæggelsen karakter af undervisning i "ren" matematik afbrudt af "øer" med modellering.

Den blandede tilgang. Med denne tilgang assisterer problemløsning og modellering indlæringen af matematiske begreber så ofte som det skønnes muligt, både ved at motivere introduktionen af nye begreber og ved at bringe allerede introducerede begreber i spil i forskellige sammenhænge.

Herved kan indlæringen af den "rene" matematik og mere eller mindre realistiske anvendelser heraf godt fremstå som ligeværdige størrelser for eleverne. Hvad angår tilrettelæggelsen er det imidlertid karakteristisk for denne tilgang, at de to elementer i matematikundervisningen er prioriteret således at indholdet og rækkefølgen af de matematiske begreber er givet på forhånd[3], hvilket de valgte anvendelsesorienterede problemstillinger tilpasses efter.

Den læreplansintegrerede tilgang. Her er udgangspunktet en række problemer, "rene" matematiske og/eller anvendelsesorienterede, og matematik til at håndtere disse problemer forsøges først udvalgt og udviklet efterfølgende. I princippet er den eneste restriktion at de behandlede problemer fører til matematik der er relevant for og lydig i forhold til den givne læreplan for matematik.

Den tværfagligt integrerede tilgang. Her er problemstillingerne ligesom i forrige tilgang styrende for hvilke matematiske begreber eleverne introduceres for. Forskellen består i at matematik med denne tilgang ikke optræder som selvstændigt fag, hvorfor den matematiske behandling af de valgte problemstillinger blot er et ud af flere elementer i et tværfagligt samarbejde.

Det var og er mit indtryk at arbejdet med matematisk modellering i det almene gymnasiums matematikundervisning overvejende foregår – i det mindste frem til gymnasiereformen som trådte i kraft i sommeren 2005 – som kortere velafgrænsede forløb, altså efter ø-tilgangen. Dette indtryk bekræftes af Blum og Niss som en international tendens, idet de i samme artikel nævner denne og den blandede tilgang som de to fremherskende på gymnasialt niveau. Kun sjældent opleves matematikundervisning tilrettelagt så det med rimelighed kan rubriceres under den læreplansintegrerede tilgang, hvilket i sig selv var en medvirkende årsag til at jeg fandt – og stadig finder – det specielt interessant at eksperimentere med hvilke potentialer der er i denne tilrettelæggelsesform.

Modelleringsarbejdet og den samlede tilrettelæggelse

En anden grund til at jeg både dengang og nu vil pege på den læreplansintegrerede tilgang som den umiddelbart mest interessante tilrettelæggelsesform at undersøge nærmere er at der sker et afgørende skift fra den blandede til den læreplansintegrerede tilgang med hensyn til hvad der betinger hvad. I alle de fire førstnævnte tilgange vil det være læreplanens liste over matematiske begreber der styrer tilrettelæggelsen som valget af op-

[3] Om det er den enkelte lærer eller Undervisningsministeriet der står for denne del af tilrettelæggelsen, er i denne sammenhæng underordnet.

gavetyper herefter indordnes under. Dette forhold er – som det fremgår af karakteristikken ovenfor – byttet om ved både den læreplansintegrerede og den tværfagligt integrerede tilgang. En tilrettelæggelse baseret på massivt tværfagligt samarbejde vurderede jeg ville være for praktisk omsiggribende at kaste sig ud i med afsæt i det almene gymnasiums daværende rent fag-opdelte struktur, så jeg valgte tidligt den læreplansintegrerede tilgang som den jeg ville forsøge at implementere.

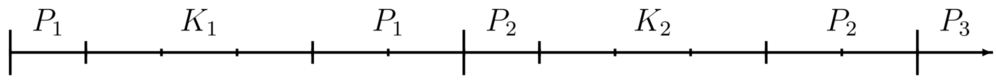
På dette punkt var mine to medtilrettelæggere Erik og Karsten dog for første og eneste gang skeptiske i forhold til de idéer jeg forsøgte at opnå tilslutning til. Som dem med det praktiske ansvar for at få alle aspekter af forsøgsundervisningen til at gå op i en højere enhed var de bekymrede for, at de tidsmæssigt ville blive pressede i forhold til behandlingen af det angivne pensum hvis de planlægningsmæssigt ikke kunne lægge noget af det pensumstyrede arbejde i perioderne med projektarbejde. Omvendt var jeg bekymret for, at den ønskede høje grad af elevstyring i projektarbejderne ville blive umuliggjort, hvis eleverne blev udsat for et "krydspres" af pensumdækning og kompetenceorientering og således ikke alene kunne fokusere på at fastholde orienteringen mod udvikling af en eller flere faglige kompetencer som mål for hvert projektarbejde (jf. analysen i kapitel 9).

Diskussionen endte med at Erik og Karsten – som de imødekommende og forsøgsvillige mennesker de er – gik med til at holde projektarbejderne fri for krav om pensumdækning, både fordi jeg stædigt blev ved at argumentere for nødvendigheden heraf og fordi de grundlæggende var enige med mig, men altså imødeså problemer afledt af en sådan principfasthed.

Næste skridt var udviklingen af en tilrettelæggelsesmodel som havde moduler med ligeligt vægtet projekt- og kursusarbejde som omdrejningspunkt. Hvert af disse moduler skulle tilrettelægges efter følgende skabelon:

- Indledningsvist arbejder eleverne gruppevis med en række åbne problemstillinger som de selv formulerer, vejledt af og eventuelt på ide fra læreren. Diskussionen heraf sker med henvisning til hvilke kompetencer, der forsøges udviklet. Som et centralt element står udvikling af elevernes matematiske modelleringskompetence (Blum & Niss; 1991; Niss; 1989).
- Herefter arbejdes der i en periode med dele af det faglige pensumbeskrevne stof på basis af den alternative didaktiske kontrakt som er krumtappen i ankerposition 3 (side 172).
- Forløbet afsluttes – jf. ankerposition 1 (side 145) – med en periode med elevstyret problemorienteret projektarbejde gennemført i grupper, med udgangspunkt i en af de indledningsvist formulerede problemstillinger.

De mere lærerstyrede midterforløb (jf. diskussionen af begrebet “kursus” i kapitel 10) skulle konkret bygges op omkring læreplanens fem stofområder (se side 265) som der skulle arbejdes med i såvel 1. som 2. gymnasieklasse. Det giver i alt 10 kursusforløb som sammen med de projektarbejder der indrammer hvert kursus deler undervisningen ind i 10 moduler.



Figur 12.1 En model for hvordan projektarbejde (P) kan bruges til at “indramme” kursusforløb (K) i forbindelse med et længerevarende modulopdelt undervisningsforløb.

Hensynet til det faglige stofs fordeling på de forskellige kursusforløb var således én grund til at vi valgte at stile efter at dele undervisningsåret op i fem moduler. En anden grund var at vi mente at fem årlige moduler var en fornuftig afvejning af to modsatrettede hensyn med hensyn til projektarbejdets overordnede tilrettelæggelse.

På den ene side var ønsket om længerevarende forløb hvor eleverne får tid til at udvikle orienteret autonomi, den væsentligste grund til at vi ønskede at bruge så meget som halvdelen af tiden i forsøgsundervisningen på projektarbejde (jf. analysen i kapitel 9). Tilrettelæggelsesmæssigt trækker det i retning af færre og længere projektarbejder.

På den anden side tyder al den erfaring jeg kender til på, at projektarbejde i almindelighed og elevstyret projektarbejde i særdeleshed skal gentages en del gange, før tiden brugt på at lære den nye arbejdsform bliver en god “investering” i forhold til de faglige mål hermed, hvilket tilrettelæggelsesmæssigt trækker i retning af flere og dermed ofte (fordi den samlede tid til rådighed er konstant) kortere projektarbejder. Det gælder formodentlig alle nye arbejdsformer, eksempelvis det at arbejde mere end fem minutter med den samme matematikopgave, som Schoenfelds i citatet på side 163f argumenterer for er centralt hvis målet er at lære matematisk problemløsning. I forhold til projektarbejde med fokus på matematisk modelleringskompetence er det nok ikke som i problemløsning frustrationen over ikke at kunne komme igang der primært kræver tilvænning, men evnen til selv at skulle stille de relevante underspørgsmål, arbejde med samme problemstilling i længere tid mv.

Konkret resulterede vores afvejning af de to hensyn som nævnt i fem årlige moduler. Med et undervisningsår på ca. 30 uger giver det hvert forløb en varighed på ca. seks uger. I overensstemmelse med skabelonen ovenfor og ønsket om en ligelig vægtning af projekt- og kursusarbejde skulle de bruges på en uge til etablering af projektarbejdet, tre uger til et kursusforløb og to uger til at afslutte projektarbejdet, jf. illustrationen af tilrettelæggelsesmodellen i figur 12.1.

Af de 8 – 10 projektarbejder som vi i forsøgsbekendtgørelsen forpligtede os til at gennemføre skulle mindst fire fokusere på udviklingen af matematisk modelleringskompetence (to med fokus på den produktive og to med fokus på den undersøgende side af kompetencen – se side 266). Med dette krav til os selv ønskede vi dels at tone undervisningen i den ønskede retning, dels også at respektere behovet for tilvænning i forhold til projektarbejde med et givet kompetencefokus.

En sådan dybde i projektarbejdet forudsætter at man kan tilrettelægge et flerårigt forløb som et samlet hele, hvilket var baggrunden for at vi fik lov til at gøre det til en del af "forsøgspakken" at eleverne ikke allerede efter 1.g. kunne skifte til det toårige forløb til A-niveau i matematik og dermed forlade forsøget i utide.[4]

12.2.2 Nye standardopgaver

Det andet centrale element i forarbejdet til forsøgsundervisningen bestod som nævnt ovenfor i at udvikle en samling nye opgaver. De eksisterende eksamens- og lærebogsopgaver kunne efter vores vurdering simpelt hen ikke bruges. Nogle kunne omformuleres så de fik relevans, men generelt fremstod de gængse opgaver ufokuserede i forhold til vores meget eksplicitte orientering mod matematikfaglige kompetencer. Det behov for nye opgaver som denne vurdering afstedkom, blev kun større med valget af den læreplansintegrerede tilgang til hvordan arbejde med matematisk modellering inddrages i matematikundervisningen, da denne tilrettelæggelsesform gør øget opmærksomhed på valg af opgavetyper endnu mere relevant end ellers, jf. omtalen i afsnit 9.2.3 (side 151ff) af en problemformulerings "curriculære funktion".

De nye opgaver skulle altså udvikles med sigte på at støtte Eriks og Karstens bestræbelser på at hjælpe eleverne med at udvikle forsøgsbekendtgørelsens vifte af matematiske kompetencer i almindelighed og matematisk modelleringskompetence og matematisk problemløsningskompetence i særdeleshed. Ved at etablere en række standarder for hvordan de forskellige kompetencer kan udfordres var det herudover et mål at opgaverne kunne hjælpe med at realisere kompetenceformuleringernes potentiale som kommunikationsværktøj, jf. omtalen på side 123 af kompetencebegrebets tre

[4] Til gengæld for det tidligere omtalte ministerielle krav om at eleverne kunne fortsætte på det etårige forløb til A-niveau i matematik.

	Anvendelsesorienterede matematiske opgaver	Rene matematiske opgaver
Svar-åbne opgaver	Fx: Hvor lang en stige kan man få rundt om et hjørne?	Fx: Hvad er et matematisk bevis?
Svar-lukkede opgaver	Fx: Hvordan afhænger den skat man betaler af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?	Fx: Bevis en formel for arealet af en ligesidet trekant.

Figur 12.2 Struktureringen af oplæggene til korterevarende opgaveløsning i Allerød-forsøget.

funktioner. Her drejede det sig om hvad der egentlig ligger i at have udviklet de to ovennævnte matematikkompetencer og at bidrage til en fælles forståelse heraf mellem Erik, Karsten og mig, mellem Erik og Karsten og deres respektive elever og – senere i forløbet – mellem os tre og fagkonsulenten som repræsentant for dem der skulle formulere opgaverne til den skriftlige eksamen med hjælpemidler.

Begge disse mål med at udvikle et sæt standardopgaver knyttet til forsøgsundervisningen fordrer en klar strukturering som markerer forskellige opgavetypers potentiale. Vores valg i den henseende resulterede i en kategorisering af opgaverne på to niveauer, jf. gengivelsen af opgavesamlingen i appendiks C. Det første niveau følger den overordnede tilrettelæggelse af undervisningen: Er der tale om "oplæg til undersøgelser"[5] som kan bruges som inspiration ved etableringen af et projektarbejde, eller er der tale om "oplæg til korterevarende opgaveløsning"[6] som er velegnede i en kursussammenhæng, fordi de er tænkt til at skulle fungere indenfor rammerne af en undervisningslektion eller to?

Det andet niveau følger opgavernes læringsmål. Da sammenhængen mellem læringsmål og valg af opgaver var tænkt forskelligt for projekt- og kursusarbejdet er kategoriseringen på dette niveau også forskellig. Oplæggene til undersøgelser er kategoriserede efter de fire matematiske kompetencer som ifølge forsøgsbekendtgørelsen skulle udfordres og udvikles gennem projektarbejderne (se side 266). Det faglige kompetencemål med hvert projektarbejde skulle jo gerne være så eksplicit og synligt for alle parter som muligt, jf. analysen i kapitel 9.

[5] Fx: "Hvad er sammenhængen mellem ens indkomst og den skat man betaler?"
[6] Fx: "Hvordan afhænger den skat man betaler af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?"

Struktureringen af oplæggene til korterevarende opgaveløsning fremgår af figur 12.2. Når der ikke her er kategoriseret i forhold til et eksplicit kompetencefokus er det fordi alle opgaverne primært er udviklet med tanke på at udfordre gymnasieelevers matematiske problemløsningskompetence, for mange opgavers vedkommende i kombination med aspekter af matematisk modelleringskompetence. Kategoriseringen har således handlet om at skabe klarhed over hvilke aspekter af matematisk modelleringskompetence de forskellige opgaver potentielt udfordrer.

For rene matematiske opgaver er svaret "ingen": De udfordrer pr. definition ikke matematisk modelleringskompetence, jf. begrebsforståelsen fremlagt i kapitel 6. Opgaver med dette karakteristikon har vi som det fremgår af appendiks C kun udviklet få af, da det falder udenfor projektets fokus.

Skellet mellem svar-åbne og svar-lukkede opgaver handler om hvilken grad af elevstyring der lægges op til, og er derfor en central sondring på alle uddannelser med et demokratisk sigte, jf. omtalen på side 147. I opgavekategoriseringen her er det særligt de anvendelsesorienterede matematiske opgaver der nyder godt af sondringen, fordi den danner grundlag for en fornuftig afvejning af den holistiske og den atomistiske tilgang til udvikling af matematisk modelleringskompetence (jf. side 158f): Er der tale om svar-åbne modelleringsopgaver som – med en relativt kort tidshorisont i modsætning til modellerings-undersøgelserne – udfordrer alle faserne i en matematisk modelleringsproces (jf. afsnit 6.2.5 på side 113ff), eller er der tale om svar-lukkede matematiseringsopgaver som kun udfordrer de "indre" dele af modelleringsprocessen?

12.3 Undervisningen

Hvordan kom forsøgsundervisningen så til at forløbe i praksis på de to gymnasier? Meget forskelligt, kan man roligt sige, eftersom den slet ikke kom igang på Himmelev Gymnasium. Da der var tale om forsøgsundervisning hvor man ikke "bare" ændrede på måden der blev undervist på, men også på indholdet og eksamenformen, skulle de elever som i sommeren 2000 var optaget på matematisk linje på de to gymnasier rimeligvis spørges om de havde lyst til at gå i en forsøgsklasse med bestemte fremlagte karakteristika, frem for rent administrativt at blive placeret i en sådan klasse.

Det var der 16 af de optagne på Himmelev Gymnasium som sagde ja til. Det var ikke nok til at fylde en hel klasse, så hvis de 16 elever skulle undervises efter forsøgsbekendtgørelsen ville det kræve at de og resten af deres klassekammerater blev undervist hver for sig i matematik. Det ville skolens ledelse imidlertid ikke finansiere da det ville ske på bekostning af oprettelse af andre mindre valghold, og for Undervisningsministeriets vedkommende var deres godkendelse af forsøg underlagt en generel præmis om at man kun giver timer til planlægning, evaluering og rapportering, ikke til ekstra undervisning. Ergo: Ingen finansiering af et ekstra matematikhold på Himmelev Gymnasium og dermed ingen forsøgsundervisning der.

På Allerød Gymnasium var der heldigvis 27 elever som meldte sig til forsøgsundervisningen, så her kunne man helt enkelt og uden ekstra omkostninger samle disse elever i den ene af de tre nye 1.g.-klasser med Karsten Wegener som matematiklærer.

Samarbejdet med mere end en lærer viste sig således at være et afgørende træk for forsøgets gennemførelse, selv om det som tidligere nævnt i udgangspunktet ikke var derfor jeg fortsatte jagten på samarbejdspartnere udover Erik von Essen på Himmelev Gymnasium som “det sikre kort”.

12.3.1 Indhold og struktur i praksis

I august 2000 startede Karsten og de 27 tilmeldte elever forsøgsundervisningen op på Allerød Gymnasium. De følgende to skoleår gennemførte 25 af dem de obligatoriske 125 årlige matematiklektioner og gik til studentereksamen under forsøgsbekendtgørelsens rammer, mens to elever forlod forsøgsundervisningen (og gymnasiet) tidligt i forløbet.

Indholdsmæssigt blev undervisningen med én ikke-ubetydelig undtagelse efter min vurdering afviklet som planlagt. Der blev gennemført i alt otte projektarbejder som alle havde en af de udvalgte matematiske kompetencer som eksplicit sigtepunkt, heraf mindst tre og for de fleste elevers vedkommende fire projekter (i sidste projekt var kompetencen selvvalgt) med sigte på matematisk modelleringskompetence, jf. figur 12.3. I den forbindelse holdt vi fast i princippet om ikke at lave stofmæssige bindinger på projektarbejderne[7]. Den side af sagen blev som planlagt klaret ved at hvert af de fem stofområder i forsøgsbekendtgørelsen (se side 265) blev bearbejdet i et kursusforløb i både 1. og 2. gymnasieklasse.

Den indholdsmæssige undtagelse fra det planlagte bestod i at kursusforløbene ikke i nævneværdig grad gjorde udvikling af matematisk problemløsningskompetence til genstand for undervisning (jf. afsnit 10.2 på side 160ff) og dermed brød med en central del af ankerposition 3 (side 172). Det vender jeg tilbage til i afsnit 13.1 og 13.3.

Strukturelt holdt Karsten og jeg gennem hele forløbet fast i “indramningsmodellen” (jf. figur 12.1) som udgangspunkt for vores drøftelser om

[7] Med projektarbejde 7 som undtagelse, jf. Karsten omtale heraf på side 4 i hans evalueringsrapport som er gengivet som appendiks G (side 355ff).

Nr.	Periode	Mål: Udvikling af...
1	Uge 35-38 2000	kultur-historisk kompetence
2	Uge 40-47 2000	modelleringskompetence
3	Uge 49-51 2000	anvendelseskritisk kompetence
4	Uge 08-13 2001	strukturel kompetence
5	Uge 17-21 2001	modelleringskompetence
6	Uge 37-43 2001	modelleringskompetence
7	Uge 50/01-10/02	strukturel kompetence
8	Uge 16-24 2002	selvvalgt kompetence

Figur 12.3 Oversigt over de gennemførte projektarbejder i Allerød-forsøget.

den overordnede tilrettelæggelsesmæssige forbindelse mellem projekt- og kursusarbejdet. I udmøntningen blev de principper som lå til grund for modellen derimod på to områder "fortyndet" mere og mere som tiden gik.

Det første område handler om at holde kursus- og projektperioder klart adskilte, så alle parter kun behøver orientere sig mod en dagsorden af gangen. Det mest synlige udtryk for denne ide er modellens inddeling af undervisningen i moduler som hver især udgør mindre, klart adskilte forløb i forløbet. I første halvdel af 1.g. foregik det i store træk sådan, i anden halvdel af 1.g. blev overgangen mellem modulerne mere udflydende, og i 2.g. var undervisningen de facto ikke moduliseret.

Det andet område handler om ideen om at lave "kæde-projektarbejde", så afslutningen af det ene projektarbejde bruges som anledning til at "tænde" – igangsætte – det næste. Sådan var det i første halvdel og til dels i anden halvdel af 1.g., hvorimod struktureringen af tiden i 2.g. også på dette punkt var løsere, jf. de lange perioder uden et igangværende projektarbejde som fremgår af tidsangivelserne i figur 12.3.

Begge disse afvigelser mellem tilrettelæggelsesmodellen og virkeligheden vender jeg tilbage til i afsnit 13.1 på side 213ff.

12.3.2 Samarbejde og arbejdsdeling

Med opstarten af forsøgsundervisningen intensiveredes Karstens og mit samarbejde. Karsten havde forsøgsklassen i matematik to gange om ugen i hhv. to og tre lektioner, og jeg var i starten til stede så godt som hver gang. Efter hver session evaluerede vi kort forløbet og snakkede om planen for næste gang, og nogle gange om måneden satte vi os på lærerværelset en time eller to efter undervisningen og diskuterede forsøgets fremdrift i et lidt større perspektiv og ambitionerne for den kommende tids undervisning.

Sideløbende hermed mødtes Erik, Karsten og jeg hele det første år[8] med godt en måneds mellemrum. Disse møder havde karakter af en blanding af et produktionsværksted, hvor vi formulerede opgaver indenfor den tidligere omtalte opgavestruktur, en støttegruppe hvor jeg og ikke mindst Erik gav Karsten støtte og modspil i forhold til de mange overvejelser og afvejninger af rent praktisk art han naturligt gjorde sig som den med ansvaret for undervisningen som helhed, og en studiekreds hvor vi læste om (Schoenfeld; 1985; Arcavi et al.; 1998) og diskuterede Alan Schoenfelds erfaringer med at undervise i matematisk problemløsning.

Det følgende er en korrespondance hvor Karsten i et dokument vedhæftet en mail af 11. december 2000 til Erik og mig lægger op til et sådant møde d. 14. december 2000, og hvor jeg efterfølgende – d. 19. december 2000 – pr. mail samler op på endnu et godt og konstruktivt møde:

> "NOGLE TANKER OM VORES MATEMATIKFORSØG
> JULEN 2000
>
> Jeg vil i det følgende forholde mig til forskellige begreber, som bruges i forbindelse med vores forsøg:
>
> 1: PROJEKTARBEJDE
> 2: PROBLEMORIENTERING
> 3: ANVENDELSESORIENTERING
> 4: MATEMATISK MODELLERING
> 5: KOMPETENCEUDVIKLING
>
> 1: PROJEKTARBEJDE
> Jeg synes vi i løbet af efteråret har haft stor glæde af at arbejde med de rapporter om: a) Kulturhistorisk kompetence, b) Modelleringskompetence & c) Anvendelskritisk kompetence. Eleverne har gjort gode fremskridt i denne arbejdsform og har investeret en imponerende energi i den. Det største problem har nok ligget i det store tidsforbrug, men med den stramme ramme for RAP3 vil vi sætte focus på det.
>
> Det har også været et mindre problem for mig at udvikle en rimelig evalueringsmodel til rapporterne. Jeg arbejder nu med 3 bedømmelseskriterier: Sammenhæng, matematik & sprog. Jeg har forsøgt at gøre problemformulering og konklusion til den ramme, der har den styrer hele rapporten. Vi har i denne sammenhæng haft stor glæde af et samarbejde med klassens dansklærer [navn nævnt] om sproglig præcision. Jeg mangler endnu at evaluere dette sammen med [dansklærerens navn]. Men jeg

[8] I løbet af det andet års undervisning, hvor der var mindre fokus på de principielle diskussioner, blev Eriks deltagelse i forsøgsprojektet naturligt nok mere og mere perifer, hvilket bl.a. viste sig ved at vi kun nogle få gange holdt møde alle tre.

vil meget gerne diskutere evalueringsproblematikken, også med henblik på skriftlige prøver og den skriftlige eksamen.

Med hensyn til matematikken har et af problemerne været, at rapporterne ikke indeholdt tilstrækkelig matematik. Dette skyldes jo ikke midst, at der ikke på dette tidspunkt har været mulighed for at lære ret meget nyt på grund af tidspresset. Her synes jeg, at vi nærmer os et lidt ømt punkt i hele forsøget, som Tomas også nævner i sit brev: Vekselvirkningen mellem kursusarbejde og projektarbejde.

Et spørgsmål der passende kunne stilles er: Hvornår skal der undervises i en model?

Tomas skriver i sit brev, at min undervisningsplan er "mere traditionel op til jul". Jeg må da her sige, at jeg finder det tilstrækkeligt til at motivere en gennemgang, at nogle af eleverne har mødt en matematisk model i en rapport. Og når jeg så skal undervise kursusdelen synes jeg ofte det bliver lidt for meget, hvis jeg så skal undervise meget problemorienteret; det føles som jeg med magt skal holde elevrne væk fra noget, som de via deres rapport er meget motiverede for at lære noget om. En vigtig pointe i forsøget er vel at motivere eleverne for at lære matematik.

Det sproglige element er vigtigere end jeg troede; det er faktisk ofte det der skiller de enkelte elever i en gruppe fra hinanden. Jeg ville her hilse yderligere hjælp fra dansk meget velkommen. Men det må jeg snakke med [dansklærerens navn] om.

2 & 3: PROBLEM & ANVENDELSESORIENTERING
Det er i virkeligheden nok det enkeltaspekt, der føles som den største ændring fra den gamle bekendtgørelse. Det har indimellem været svært lige at finde de opgaver, som passer ind på et givet sted i undervisningen og jeg har egentlig ikke brugt så mange af de opgaver, som vi i fællesskab har fundet frem til. Også her er tiden en væsentlig faktor og jeg ser frem til en bedring, når rapportskrivningen forhåbentlig vil kunne begrænses tidsmæssigt.

4: MATEMATISK MODELLERING
Vi arbejder jo med disse aspekter lige i øjeblikket og jeg har ladet eleverne selv forsøge at beskrive processen, trin for trin og vil så senere uddele en mere autoriseret udgave. Jeg håber også, at evalueringen efter RAP2 vil sætte sig spor på dette område. Jeg vil i den forbindelse gerne have jeres version af begrebet.

5: KOMPETENCEUDVIKLING
Jeg føler her en ikke ubetydelig usikkerhed, ikke med hensyn til hvad kompetencerne går ud på, men på om eleverne opnår dem og hvordan vi kan checke det i en skriftlig eller mundtlig evaluering. Det er af allerstørste betydning for mig at eleverne ikke slagtes til eksamen på grund af en for traditionel prøveform, der ikke lader deres reelle kompetencer komme til deres ret. Dette vil jeg også meget gerne diskutere. Jeg kan nævne, at klassen og jeg har diskuteret allerede til næste skr. prøve i januar at indlægge en gruppe-brainstorming- del på f.eks. 20 min ud af 2-timer."

"Hej Karsten,
Som vi snakkede om er her en reminder om de ting, som vi har snakket om vi bør ofre ekstra opmærksomhed i den kommende tid:

Vedr. tilrettelæggelsen generelt: Vi arbejder frem mod en semesterplan, hvor kursus- og projektperioder er klarere adskilt end det hidtil har været tilfældet.

Du har naturligvis udspillet, men jeg synes det vil være spændende at arbejde med at der hele tiden i princippet er et projektforløb, der "småkoger" (dvs. er startet op uden at timerne i en periode bruges på projektet), jf. min omtale af en alternativ didaktisk kontrakt i kommentarerne til bekendtgørelsesteksten.

Vedr. kursusforløbene: Du kan med hjælp fra mig arbejde på at klargøre, hvad de enkelte kursusforløb skal kredse omkring (jf. ideen om "store matematiske ideer" brugt i PISA). Hovedområderne i bekendtgørelsen kan jo være et passende udgangspunkt, men jeg synes bestemt ikke vi skal føle os bundet af at tilrettelægge efter de samme traditionelle emnekategorier, hvis det viser sig ikke at være hensigtsmæssigt.

Når "linsen" på denne vis er blevet fokuseret, bør vi i fællesskab – og meget gerne med bidrag og kommentarer fra Erik – fortsætte arbejdet med opgavekataloget ved at udarbejde 15-20 problemer indenfor hvert fokusområde, som dels kan bruges i undervisningen, dels ifm. prøver og lignende, og dels som oplæg til vejledende eksamensopgaver, så vi er parat når vi på et tidspunkt skal diskutere den side af sagen med "systemet" personificeret ved fagkonsulenten.

Vedr. projektforløbene: Her har vi jo vha. kompetencebeskrivelserne forsøgt indbyrdes at klargøre, hvad "pejlemærket" for de enkelte forløb er. Udfordringen frem ad banen består i at udvikle metoder, som du kan bruge til at komme i dialog med eleverne om disse pejlemærker, da det jo tilsyneladende er meget centralt for projektarbejdets succes at de er med på, hvilken "bold" der gås efter.

Mit forslag går som nævnt på, at vi udvikler nogle forslag til problemstillinger (mindre velafgrænsede end hvad det ville være hensigtsmæssigt at kræve af en problemformulering) ift. hvert fokusområde (kompetence), som kan danne udgangspunkt for den videre afgrænsning af arbejdet. Dette arbejde synes jeg bør foregå i fællesskab, igen meget gerne med kommentarer og bidrag fra Erik. I relation til enkelte af disse problemstillinger (fx. en ift. hver type projektarbejde) kan vi så udvikle hvad jeg vil kalde "konstruerede eksemplariske didaktiske forløb", dvs. måder at arbejde med problemstillingen på, som viser den "skæring", vi er ude efter, og som du kan snakke igennem med eleverne. Ift. denne del af udviklingsarbejdet er det naturligt at jeg spiller ud, når vi er blevet enige om nogle velvalgte problemstillinger.

Mere kortsigtet har vi også snakket om som oplæg til en evalueringssnak at uddele et evalueringsskema til eleverne nu eller først i det nye år. Vi er jo enige om, at "nævn tre gode og tre dårlige ting"-formen ift. h-

> hv. kursus- og projekdelen af undervisningen er god, men hvis du vil have mere direkte spørgsmål med, har jeg som mulig inspiration vedhæftet det spørgeskema, jeg udarbejdede ifm. evalueringen af BASE-kurset her på nat.bas., RUC.
>
> Vh. Tomas."

Jeg gengiver denne korrespondance fordi jeg synes den illustrerer den rollefordeling og arbejdsdeling i forhold til forsøgsundervisningen som Karsten og jeg hurtigt fik etableret og som vi flere gange undervejs bekræftede hinanden i vores gensidige tilfredshed med.

Karstens rolle var først og fremmest at være matematiklærer for forsøgsklassen, med alt hvad det indebærer af forskelligartede opgaver og udfordringer som kan sammenfattes i, at han skulle forholde sig til, udvikle og på visse områder beskytte eleverne som hele, ligeværdige mennesker hvis identitet som lærende subjekter kun var en del af et større hele.

Min rolle var på forhånd aftalt til dels at handle om at støtte op om Karstens gennemførelse af forsøgsundervisningen, dels at arbejde for at resultatet heraf blev så interessant som muligt som omdrejningspunkt for mit forskningsprojekt. I tilbageblik handlede det ikke mindst om at varetage følgende funktioner:

Sparringspartner: Tilrettelæggelsen af undervisningen foregik som nævnt ovenfor som et parløb mellem Karsten og mig. Cyklussen i dette samarbejde var at jeg forsøgte at konkretisere det fugleperspektiv vi i forarbejdet til forsøgsundervisningen havde på tilrettelæggelsen, Karsten spillede bolden retur med en konkret undervisningsplan for den nærmeste fremtid, som vi så diskuterede og justerede på når vi mødtes rundt omkring de enkelte undervisningssessioner.

Principrytter: Som korrespondancen ovenfor illustrerer bestod mit bidrag til det løbende fælles tilrettelæggelsesarbejde ikke mindst i at røgte de fire ankerpositioner.

Opgaveproducent: Det ovennævnte behov for nye standardopgaver blev med forsøgsundervisningens igangsættelse mere og mere noget jeg tog mig af. Det skyldes dels at jeg som den uden ansvar for afvikling af undervisningen bedre end Karsten kunne afsætte den megen tid det tager at producere opgaver som er "lige på kornet" i forhold til et givet perspektiv, dels at arbejdsdelingen med at jeg kom med forslag til nye opgaver som Karsten kommenterede viste sig at være en effektiv måde at konkretisere vores "fra ide til praksis"-diskussioner.

Observatør og dataindsamler: Afviklingen af undervisningen var helt og holdent Karsten opgave. Sådan havde jeg på forhånd ønsket og aftalt med Karsten at det skulle være, og det blev fastholdt gennem hele forløbet. Når undervisningen kørte koncentrerede jeg mig om at observere og indsamle data om hvad der foregik. For forskningsdelen af projektet var det en helt central opgave, som jeg som ny i faget havde gjort mig mange tanker om og gik til med en vis ydmyghed. I afsnittet herunder fortæller jeg om hvordan det konkret kom til at foregå.

12.3.3 Dataindsamlingen

Af de i alt 250 lektioner forsøgsundervisningen strakte sig over var jeg til stede som observatør i ca. halvdelen, fordelt med tilstedeværelse ca. 75% af tiden det første år og 25% af tiden det andet år. Jeg sad det samme sted hver gang, ude i siden ved vinduerne (for ikke at komme til at filme i modlys) ca. to tredjedele fremme i klasserummet i forhold til tavlen langs den ene endevæg, med et digitalt videokamera stående på et stativ ved min side og en ekstern mikrofon enten hængende ned fra loftet (ved længere fælles klasserumsdiskussioner) eller fastspændt i et stativ som kunne stilles tæt på dem jeg ønskede at optage lyd fra (hvis tiden overvejende skulle bruges til gruppearbejde).

"Dem" var størstedelen af tiden større eller mindre dele af en gruppe på fem piger som indvilligede i at blive observeret tættere end resten af klassen, da jeg efter få ganges tilstedeværelse fortalte eleverne om hvad jeg gerne ville have ud af at følge deres matematikundervisning og hvilke former for hjælp jeg i den forbindelse havde brug for fra dem. Kun i forbindelse med femte og sjette projektforløb, hvor Karsten i modsætning til de andre ganges frie gruppedannelse stod for sammensætningen, fulgte jeg en anden gruppe bestående af to drenge og to piger, herunder pigen L som havde sagt ja til at være den gennemgående elev i alle observationerne.

Aftalen med disse elever indebar at de rykkede hen til det bord der stod lige foran mig og kameraet hver gang der blev arbejdet gruppevis, hvilket var så godt som hele tiden under projektarbejderne og en stor del af tiden i kursusforløbene. Efter at have prøvet mig lidt frem opdagede jeg at eleverne til min overraskelse var mindre påvirkede af min og kameraets nærhed når vi gjorde sådan end hvis jeg rykkede rundt i klasserummet og forsøgte at komme til dem. Tilsyneladende ødelagde det ikke elevernes mulighed for at opføre sig naturligt at situationen var kunstigt sat op med observation for øje, når bare den var den samme hver gang, dag ud og dag ind.

Mens jeg observerede gruppearbejdet og klasserumsdiskussionerne tog jeg håndskrevne noter som jeg undervejs nåede at renskrive ca. en fjerdedel af. I appendiks B har jeg gengivet et uddrag heraf samt den oversigt over forkortelser jeg brugte til at notere (og senere søge på elektronisk) hvem der i et angivet tidsrum var i fokus, hvilken form for aktivitet der var tale om, hvilken databehandlingsmæssig status det observerede aktuelt havde og om det var særligt interessant i forhold til en række på forhånd udpegede forskningsmæssige fokusområder (jf. side 272).

Af de godt 100 lektioner der blev observeret på denne måde blev ca. 40 timer optaget på videobånd. Disse optagelser har jeg gennemset, nogle undervejs og nogle efterfølgende, og for ca. en fjerdedels vedkommende kopieret over på andre videobånd med hver deres tema. Nogle af de optagelser jeg fandt særligt interessante bad jeg de filmede elever og/eller Karsten se og kommentere i forbindelse med de båndede interviews jeg lavede med dem – fire med en gruppe elever, et med Karsten og Erik von Essen og et med Karsten og klassens fysiklærer, som deltog i det sjette projektarbejde.

Udover de logbogsførte og delvist videooptagne klassserumsobservationer og de båndede interviews indsamlede jeg forskellige former for skritlige data:

- Oplæg fra Karsten til elevernes arbejde – indgår i den samlede opgavesamling jeg lavede og har gengivet som appendiks C.
- De formelle skriftlige prøver og eksamener – gengivet som appendiks E.
- Skriftlige opgavebesvarelser fra de elever jeg fulgte tæt – et udvalg heraf er gengivet som appendiks F.
- Papirer til eleverne og anden form for korrespondance fra Karsten vedrørende planlægning og tilrettelæggelse – ikke gengivet som appendiks, men inddraget i den ovenstående karakteristik af forsøgsundervisningen.
- Skriftlig evaluering af forsøget fra Karsten i form af den officielle afsluttende forsøgsrapport – gengivet som appendiks G.
- Skriftlig evaluering af forsøget fra samtlige elever i form af besvarelse af et spørgeskema udarbejdet og distribueret af mig umiddelbart efter forøgets afslutning – gengivet som appendiks H.

12.4 Evalueringen

12.4.1 Den formative evaluering af forsøget

Den formative evaluering af forsøget antog i hvert fald to forskellige former. Den ene var gennem de uformelle og usystematiske samtaler mellem Karsten og mig og mellem Karsten og eleverne om hvordan vi aktuelt hver især oplevede forskellige sider af forsøgsundervisningen. Når disse samtaler fik evaluerende karakter var det ofte affødt af en frustration som Karsten og/eller eleverne oplevede i kølvandet på at nogle af de mere principielle sider af forsøget som fx. kompetenceorenteringen af projektarbejderne eksplicit var blevet holdt i hævd.

Den anden form for formative evaluering af forsøget var en mere systematisk snak om oplevelserne med forsøgsundervisningen som i alt blev gennemført tre gange med ca. et halvt års mellemrum. Afsættet var hver gang elevernes besvarelse af et spørgeskema hvis kerne bestod af opfordringerne "Angiv tre ting, som du synes fungerer fint:" og "Angiv tre ting, som ikke fungerer helt godt, gerne med forslag til forbedringer:". Disse besvarelser blev fulgt op af en mundtlig snak som Karsten tog med eleverne en ad gangen mens resten arbejdede på egen hånd. I forlængelse heraf afholdt vi et forældremøde hvor både Karsten, eleverne og jeg deltog og efter tur kort fortalte om vores aktuelle oplevelse af fremdriften i forsøget og svarede på spørgsmål fra forældrene.

12.4.2 Den formative evaluering af eleverne

Begge de ovennævnte former for samtale mellem Karsten og eleverne – både de uformelle og de mere formelle på tomandshånd – fungerede også som formativ evaluering af eleverne, både med hensyn til deres generelle ageren som elever i forsøgsklassen og med hensyn til deres matematikfaglige progression.

Herudover blev eleverne formativt evalueret når Karsten kom med skriftlige og mundtlige tilbagemeldinger på deres skriftlige arbejde. Som det evalueringsmæssigt mest anderledes ved forsøget drejede det sig ikke mindst om evalueringen af de projektrapporter eleverne afleverede efter hvert projektforløb. Tilsammen skulle disse rapporter ifølge forsøgsbekendtgørelsen udgøre ca. halvdelen af det skriftlige arbejde, svarende til vores forestilling om at den samlede tid brugt på projektarbejdet skulle udgøre ca. halvdelen af undervisningstiden. Som Karsten selv nævner i forbindelse med korrespondancen gengivet på side 200f valgte han her tidligt at beslutte sig for og klart udmelde et sæt af evalueringskriterier som med hans overskrifter og mine udlægninger heraf kan karakteriseres således:

Sammenhæng: Indeholder rapporten en klar og velafgrænset problemformulering som kan udfordre den faglige kompetence i fokus? Er den fremlagte analyse en afspejling heraf, og har den arbejdsproces der ligger bag rapporten været det? Konkluderes der på en måde som adresserer problemformuleringen?

Matematik: Inddrages matematikken i rapporten på en for analysen relevant måde? Er inddragelsen rimeligt fyldestgørende i forhold til det fremlagte problem? Anvendes de matematiske værktøjer og teknikker korrekt? Hvor teknisk avancerede er disse værktøjer og teknikker?

Sprog: Er rapporten sprogligt homogen? Er den velformuleret? Er den rimeligt fri for meningsforstyrrende stavefejl og forkerte tegnsætninger? Tager den sig overordnet set formsmæssigt ud som en færdig rapport?

12.4.3 Den summative mundtlige evaluering af eleverne

Den mundtlige eksamen skulle (som nævnt på side 189) primært evaluere udbyttet af projektarbejdet. Det forhold at ønsket til det rent faglige udbytte allerede i udgangspunktet var fastlagt til at skulle være udvikling af en udpeget matematisk kompetence udnyttede vi til at bruge evalueringen som styringsværktøj ved tidligt at fortælle eleverne, at de mundtlige eksamensspørgsmål ville lyde noget i retning af:

> "Du har trukket projekt nr. ______. Forbered dig på at diskutere indholdet af den tilhørende rapport med tanke på stærke og svage sider og hvordan den kunne forbedres, samt i hvilken grad det samlede projekt har udviklet den kompetence der var sigtepunktet."

En sådan eksplicit fagligt kompetenceorienteret mundtlig eksamensform afprøvede vi i forbindelse med årsprøven efter 1.g. med Karsten som evaluator og mig som intern censor – til alles tilfredshed: Karsten og jeg var enige om at det var nemmere end vi havde forestillet os at bedømme elevernes kompetencebesiddelse, vi fik benyttet alle karakterer i 13-skalaen undtagen 00, og de ca. $3/4$ af eleverne vi i situationen nåede at snakke med om sagen var rimeligt enige i vores bedømmelse af deres præstation, også dem der havde fået lave karakter, og ingen gav udtryk for at de følte sig bortdømt eller unfair behandlet.

Ved afslutningen af 2.g. var der ingen af eleverne i forsøgsklassen der af Undervisningsministeriet blev udpeget til at skulle til mundtlig studentereksamen i matematik, så vi fik desværre ikke lejlighed til at afprøve den udviklede eksamensforms robusthed overfor deltagelse af en ekstern censor.

12.4.4 Den summative skriftlige evaluering af eleverne

Hvad angår den skriftlige eksamen i maj 2002 mener jeg det er hensigtsmæssigt at beskrive form og indhold hver for sig.

Formen

Tidsmæssigt blev tingene afviklet helt som planlagt, jf. omtalen på side 189f; en time uden hjælpemidler efterfulgt af fire timer med. Karsten, jeg og fagkonsulenten havde flere andre muligheder oppe til overvejelse (jf. Jensen; 2000a, pp. 50-51): Udlevering af tekstoplæg nogle dage inden en skriftlig eksamen på skolen, en tag-med-hjem-prøve af nogle døgns varighed med efterfølgende mundtligt forsvar af den afleverede skriftlige besvarelse, eller en model hvor eksamensafviklingen foregår over nogle uger som en integreret del af undervisningen. Når vi endte med at holde fast i forsøgsbekendtgørelsens konservative "vi gør som vi plejer"-løsning skyldtes det blandt andet, at fagkonsulenten mente de andre modeller i spil ville være for omkostningsfulde både økonomisk og tidsmæssigt i forhold til elevernes samlede eksamensafvikling til at være interessante i et udviklingsperspektiv. Desuden var eksamensformen ikke et område som hverken Karsten eller jeg havde en særskilt interesse i at eksperimentere med når bare ankerposition 4 (se side 139) blev tilgodeset, og derfor valgte vi – som det var tilfældet med valget af stofområder i forsøgsbekendtgørelsen – at bruge krudtet andre steder som optog os begge.

Det galdt hvad eksamensformen angår ikke mindst den udfordring der ligger i at evaluere besiddelsen af matematisk problemløsningskompetence hos matematikfagligt set svage elever. Problemløsning kan nemt opleves som en slags "enten/eller-situation" hvor man enten får den lyse ide der skal til eller føler man ikke kan komme nogen vegne, og de svagere elever risikerer derfor ikke at kunne demonstrere de (begrænsede) dele af kompetencen som de rent faktisk besidder. Det skaber et behov for at kunne hjælpe dem videre i en fastlåst situation, og her afprøvede vi to forskellige modeller.

Den ene tager udgangspunkt i at "udfolde" de i udgangspunktet "spidsformulerede" – formuleret så kort og "kontant" som muligt – opgaver, dvs. formulere en sekvens af underpørgsmål som tilsammen anviser en mulig vej til løsning af opgaven. Sådanne udfoldninger viste sig at være et effektivt middel til at diskutere forskellen på problemløsning og løsning af mere umiddelbart tilgængelige opgaver med eleverne, og flere af eleverne tog også metoden til sig som problemløsningsheuristik[9] – "Jeg har lært at løse en opgave, hvis type jeg ikke har set før vha. 'udfoldning'", som en skriver i besvarelsen af det afsluttende spørgeskema (se side 365). Men som hjælp i en prøvesituation fandt hverken Karsten og jeg eller eleverne det tilfredsstillende, da vi – efter at have diskuteret problemstillingen med

[9] Jf. omtalen på side 160ff af nogle aspekter af matematisk problemløsningskompetence.

eleverne og brugt udfoldninger nogle gange i undervisningen – prøvede det i forbindelse med årsprøven efter 1.g. Her kunne man "købe" de første dele af udfoldninger af prøveopgaverne mod at give afkald på 40% af det maksimale antal point man kunne få for opgavebesvarelserne, jf. gengivelsen af hjælpespørgsmålene i appendiks E. Eleverne gav udtryk for at risikoen for at de ukendte gode råd ikke var til nogen hjælp var for stor, og der var da også kun to elever som benyttede sig af muligheden. Desuden virkede hele situationen med at nogen stod parat med "hemmelige" hjælpespørgsmål kunstig på alle parter i forhold til problemløsningssituationer uden for en prøvesituation, så den model blev vi ved evalueringen af årsprøven enige om at forlade.

I stedet begyndte vi at eksperimentere med en model hvor eleverne i nogle på forhånd fastlagte grupper og med en på forhånd fastlagt tidsramme får lejlighed til at gå hen i nogle nærliggende lokaler for at forsøge at hjælpe og inspirere hinanden undervejs i den skriftlige prøve. 4-5 elever foretrak at bruge al tiden på individuelt arbejde, og det fik de selvfølgelig lov til at blive siddende i prøvelokalet og gøre. Blandt de øvrige elever som afprøvede modellen ved diverse mindre prøver undervejs i 2.g. var der en udtalt oplevelse af at det var en form som virkede efter hensigten, og Karsten og jeg følte at en sådan sparring omkring problemløsning kolleger imellem virkede meget autentisk i forhold til livet uden for klasserummet og derfor i sig selv værdifuld at øve sig på. Vi blev derfor enige med fagkonsulenten om at det var denne model vi ville benytte os af til den skriftlige studentereksamen efter 2.g., jf. gengivelsen af de forskellige termins- og eksamensopgavesæt i appendiks E. Tilbage var så at beslutte sig for det tidsmæssige forløb: Både tiden alene inden og selve sparringen skulle være lang nok til at man kunne nå at læse opgaverne igennem og overveje hhv. diskutere mulige løsningstilgange, og kort nok til at man ikke kunne nå at arbejde frem mod konkrete svar, da det jo var det første og ikke det sidste det var meningen man skulle udveksle. Konkret nåede vi efter lidt afprøvning og diskussion i klassen frem til at det mest hensigtsmæssige var at lade begge seancer vare 20 minutter.

Udover disse muligheder for hjælp vil en vis valgfrihed mellem de stillede opgaver forventeligt også kunne mindske problemet med enten/ellersituationen, så det byggede vi som det fremgår af appendiks E ind i alle termins- og eksamensopgavesættene.

Indholdet

Indholdsmæssigt gik de afsluttende skriftlige eksaminer noget anderledes end planlagt. Hvad angår *den skriftlige prøve uden hjælpemidler* blev det tidligt i processen aftalt med de daværende fagkonsulenter at udgangspunktet skulle være indholdet i den tilsvarende del af den traditionelle eksamen, men med mulighed for at udelade opgavetyper der eksplicit spørger til brugen af nogle af de færdigheder der er nævnt i den uddybende pensumbeskrivelse i 1999-bekendtgørelsen, fordi vi jo som nævnt (side 188f) ikke var forpligtede herpå i forsøgsbekendtgørelsen. Denne aftale blev senere konfirmeret af den fagkonsulent der kom til midt i forsøgsperioden, og på den baggrund udarbejdede Karsten en negativliste over de faglige færdigheder som efter hans vurdering kunne udfordres i de traditionelle færdighedsprøver, men ikke i forsøgs-færdighedsprøven fordi det faldt uden for hvad eleverne i forsøgsklassen var blevet trænet i. Den negativliste mente Karsten (jeg deltog ikke i disse vurderinger og diskussioner) ikke til fulde blev respekteret i den centralt stillede forsøgs-færdighedsprøve fra maj 2002 som er gengivet i appendiks E.

Det egentlige indholdsmæssige problem opstod dog omkring evalueringen af elevernes matematiske problemløsningskompetence i *den skriftlige prøve med hjælpemidler* i maj 2002. Her blev der fra centralt hold med fagkonsulenten som repræsentant stillet nogle opgaver som er markant anderledes end dem eleverne var blevet trænet i i undervisningen (jf. samlingen af opgaver i appendiks C) og havde mødt til terminsprøven to måneder før. En meget synlig forskellighed – som man kan forvisse sig om ved at sammenligne termins- og eksamensopgavesættene i deres helhed, jf. gengivelsen i appendiks E – er at de centralt stillede opgaver fra maj 2002 rummer langt flere informationer og direktiverer og derfor rent tekstmæssigt er 3-4 gange længere end vores standard- og terminsprøveopgaver.

Som et let sammenligneligt eksempel er en af vores standardopgaver formuleret således (se side 276):

> "Modellér hvor meget større en hønsegård kan blive hvis man har en mur at bygge opad ift. hvis man bygger den fritstående."

Temaet havde fagkonsulenten ladet sig inspirere af[10], men formsmæssigt var det blevet til følgende formulering i eksamensopgavesættet fra maj 2002:

> "Der skal bygges en hønsegård i tilknytning til et hønsehus. Hønsehuset er 10 m langt og skal udgøre en del af den ene side af hønsegården. Resten af hønsegården indhegnes med et hønsenet på i alt 120 meter. Vi ønsker en hønsegård med maksimalt areal.
>
> Opstil en matematisk model for dette problem i følgende tilfælde: Hønsegården skal være rektangulær.

[10] Som jeg vender tilbage til i afsnit 13.4 udarbejdede Karsten og jeg et sæt vejledende eksamensopgaver i problemløsning, som opgaven her indgik i.

> Modellen skal indeholde passende tegninger, indførelse af betegnelser for de størrelser, der har betydning, samt opstilling af et matematisk udtryk for arealet.
>
> Beskriv dernæst en fremgangsmåde til at beregne hønsegårdens dimensioner.
>
> Gennemgå selv yderligere et eksempel, hvor hønsegården er trekantet, cirkulær eller har en helt anden form."

Bedømmelsen af elevernes samlede besvarelse af prøverne med og uden hjælpemidler resulterede i et gennemsnit lige omkring 7 på 13-skalaen. Den bedømmelse var hverken Karsten eller jeg voldsomt uenige i. Elevernes besvarelser var generelt ikke særligt gode og noget under hvad vi havde forventet forud for eksamen, men da vidste vi ikke at de ville blive stillet opgavetyper de ikke var vant til, og i det lys var niveauet i besvarelserne ikke spor overraskende, men selvfølgelig skuffende og et selvtillidsmæssigt "gok i nødden" på både Karsten og eleverne.

Hele forløbet omkring den skriftlige eksamen fik Karsten og eleverne medhold i en klage over, hvilket resulterede i at eleverne fik mulighed for at gå til omeksamen i august 2002. Det tog størstedelen af dem imod, og denne gang var opgaverne til prøven med hjælpemidler (som også er gengivet i appendiks E) helt i tråd med vores spidsformulerede måde at stille opgaver på som eleverne kendte.

Resultatet blev igen et samlet gennemsnit på omkring 7 på 13-skalaen, kun marginalt højere end ved eksamen i maj. Den bedømmelse fandt både Karsten og jeg generelt helt urimelig. Vi mente ikke eleverne havde fået kredit svarende til hvad de havde demonstreret de kunne (i appendiks F er tre af besvarelserne gengivet), men nu var der ikke mere at gøre ved resultatet i dette konkrete tilfælde.

I afsnit 13.4 (side 230ff) analyserer jeg baggrunden for dette ikke særlig skønne forløb og forsøger at kaste lidt mere lys over de forskellige opgavetypers forskellighed.

13 Hindringer med eksemplarisk karakter

I dette kapitel analyserer jeg fire aspekter af Allerød-forsøget: Forvaltningen af tiden, muliggørelsen af elevstyring, lærerens ressourcer og den afsluttende skriftlige eksamen.

Det er de aspekter med eksemplarisk karakter som jeg vil udpege som de væsentligste hindringer for at utopien om en fuldstændig realisering af "den gode praksis" blev til virkelighed i dette konkrete tilfælde, jf. spørgsmålet som på side 175 satte dagsordenen for nærværende del af afhandlingen.

13.1 Forvaltningen af tiden

I al institutionaliseret undervisning er tiden en knap ressource: Den tid man bruger på én meningsfuld aktivitet er ikke til rådighed for en anden. Den udfordring vedrørende forvaltning af tiden som det medfører, var tydelig at mærke i Allerød-forsøget.

13.1.1 Klare mål som stressfaktor

Et af de signifikante træk ved dette forsøg var den eksplicitte måde de faglige mål for elevernes læring blev brugt på. I planlægningen og iscenesættelsen af forsøgsundervisningen fortalte vi – forsøgsklassens lærer Karsten Wegener og jeg – alle der gad lægge ører eller øjne til om målene, og i gennemførelsen blev de nidkært forsøgt forfulgt ved tilrettelæggelsen og orkestreringen af undervisningen. En af konsekvenserne heraf var at den indbyrdes kamp om tiden mellem de forskellige undervisningselementer (projektarbejde, korterevarende problemløsning, stofgennemgang etc.) i fokus blev svær at administrere, fordi de hver især havde deres eget rationale der som en anden sirene forsøgte at lokke til at blive ved det fornuftige man var i gang med uden hensyntagen til helheden. Karsten udtrykker det således på side 4 i den officielle afsluttende rapport om forsøget (Wegener; 2002, gengivet som appendiks G):

> "Det største problem i forsøget var mangel på tid. Projekterne, navnlig det tværfaglige i 2.g, tog for megen tid. Gruppearbejdsformen giver jo en del spildtid, som eleverne dog har ment rigeligt blev indhentet i de små hjem , når rapporterne blev skrevet, ofte med brug af nattetimer og week-end´er.
>
> Indimellem skulle vi så læse pensum og lave træningsopgaver, men da vi også meget gerne skulle lave problem- orienterede opgaver stod vi her overfor et andet stort problem: Vi gennemførte ikke bare et [forsøg] – med projektrapporter – men også et med problemorienterede opgaver. Og så er det egentlig ikke så underligt, at vi manglede tid."

Reduktionen i antallet af projektarbejder i 2.g. (jf. omtalen på side 199) skete bl.a. som følge af behovet for mere tid til kursusarbejdet. På trods at dette forsøg på et "forebyggende" tiltag gjorde projektarbejdets omsiggriben at færdighedstræning og til dels problemløsning blev "klemt" tidsmæssigt og dermed underprioriteret. Sådan oplevede både Karsten og jeg det, hvilket bl.a. viste sig ved at det var en tilbagevendende problematik i vores løbende mundtlige evaluering af forsøgsundervisningens fremdrift. Blandt eleverne var det især oplevelsen af utilstrækkelig tid til færdighedstræning der fyldte meget i bevidstheden, som det bl.a. illustreres af spørgeskemabesvarelserne på side 403f om færdighedsdelen af den skriftlige eksamen og af påpegningen af denne problematik som et dominerende tema i besvarelserne på side 368f om tre dårlige ting ved forsøgsundervisningen som helhed.

13.1.2 Pensumreduktion og afvejningen mellem elev- og lærerstyring

På sidste side i slutrapporten (Ibid.) sammenfatter Karsten nogle af de erkendelser og erfaringer han i tilbageblik mener at have fået ud af Allerødforsøget:

> "Et par ting står klart for mig efter dette meget radikale forsøg : Problemopgaver og projektarbejde er meget motiverende for eleverne, men samtidigt også meget tidskrævende – det vil i praksis sige , at der skal en mærkbar pensumreduktion til. Man skal nok heller ikke overlade for megen styring til eleverne, da en del elever på B-niveau ikke føler sig trygge ved det. Problemformuleringen i projektarbejderne kræver også stor opmærksom fra læreren."

Problemstillingen vedrørende problemformulering vender jeg tilbage til i næste afsnit. Hvad pensumreduktion angår var det som nævnt i afsnittet om pensumbeskrivelsen på side 188f noget både Erik von Essen, Karsten og jeg tidligt i arbejdet med forsøgsbekendtgørelsen var meget bevidste om nødvendigheden af. Man kan ikke på andet end retorisk niveau hæve det faglige ambitionsniveau markant på ét område gennem eksplicitering af faglige kompetencemål uden at sænke det på et andet område ved at reducere den stofmængde som skal behandles i undervisningen. På det punkt mente Karsten altså i tilbageblik ikke vi var gået nok til biddet da vi udarbejdede forsøgsbekendtgørelsen. Som han selv uddyber det i slutrapporten (Ibid., pp. 3-4):

> "Det var nok en fejl i vores forsøg, at vi beholdt alle emnerne og blot sprang de uddybende kommentarer over. Det stillede eleverne dårligt, fordi de så skulle klare sig hele vejen med et 'tyndere' lag af viden og kunnen."

Den vurdering er jeg enig i, og generelt tror jeg også en for ringe pensumreduktion er en af de største trusler mod at opnå succes med at indføre eksplicit kompetenceorienteret undervisning. I Allerød-forsøget mener jeg imidlertid ikke det var her skoen for alvor trykkede i forhold til at undgå følelsen af et for voldsomt tidspres. Det var i det andet forhold Karsten nævner ovenfor; afvejningen af elev- og lærerstyring. Her mener Karsten altså – med støtte i elevernes evaluering af forsøget, fx. spørgeskema-besvarelserne på side 381f og side 390f om afvejningen af elev- og lærerstyring – at elevstyringen i vores forsøg nok var for radikal.

Min vurdering er at det afhænger af hvilke dele af undervisningsprocessen man snakker om: Jeg oplevede "indramningsmodellen" (se figur 12.1 på side 194) som et forsøg på at etablere en overordnet ramme for tilrettelæggelsen af forsøgsundervisningen som tog udgangspunkt i en forestillling om, at en stram styring af den overordnede forvaltning af tiden (eventuelt fastlagt kollektivt, men herefter administreret af læreren) er en forudsætning for at praktisere høj grad af elevstyring af de enkelte dele af undervisningen.

Det konkrete problem i den forbindelse var efter min vurdering at der var for lidt lærerstyring hvad angår fastholdelse af de indgåede aftaler vedrørende den overordnede forvaltning af tiden, fx. afleveringsfrister. Hvis man kigger nærmere efter er det også den vinkling størstedelen af eleverne lægger på sagen i deres spørgeskema-besvarelser på side 372f om arbejdsformen og tidsforbruget generelt. Konkret er der flere der nævner at der var vanskeligheder med at stoppe projektarbejderne til den annoncerede tid (jf. omtalen heraf på side 199), eksempelvis:

> "Generelt har det ikke været så struktureret mht. adskillelse af emner og afleveringsfrister." (elev nr. 8)

> "Der var tendenser til, at projektforløbene trak for længe ud, tiden ovre i skolen blev ikke altid udnyttet optimalt. Det hele blev udskudt, hvilket betød endnu mindre tid til opgaveregning. Dette har vi, elever, selvfølgelig haft en stor del af skylden for. . . " (elev nr. 13)

> "Projekterne havde det med at blive alt for langtrukne, (pga. elevernes manglende arbejdsindsats, hvor læreren nok skulle have været mere streng og konsekvent, bl.a. mht. for sent afleverede opgaver)." (elev nr. 19)

I forlængelse heraf var tidsforbruget også en af de ting Karsten fremhævede tidligt i forløbet i kommentarerne om projektarbejdet i korrespondancen fra december 2000 gengivet på side 200.

Elev nr. 7 – pigen L som var den gennemgående elev i alle mine klasserumsobservationer (jf. omtalen af dataindsamlingen på side 204f) – formulerer det på en måde som fint udtrykker hvad jeg oplevede som det ømme punkt hvad angår forvaltningen af tiden i Allerød-forsøget:

> "Jeg mener vi brugte for meget tid på projekterne. De er meget tidskrævende, men det drejer sig altså også om at jo mere tid man har jo mere sløser man. Derfor mener jeg sagtens at vi kunne have lavet de samme projekter på mindre tid. Den tid der ville være sparet der skulle så være brugt på klasseundervisning og opgaveregning. Det savnede jeg mere af." (Appendiks H, side 372 om arbejdsformen og tidsforbruget generelt)

> "Jeg synes at vi som elever fik lov til at styre for meget på en måde der ikke var særlig konstruktiv. Der var for ofte hvor vi fik lov at få flere timer til projekter fordi vi ikke lige var færdige (hvilket oftest skyldtes at vi havde været for ukoncentrerede i starten af forløbet)." (Appendiks H, side 381 om afvejningen af elev- og lærerstyring)

13.2 Muliggørelsen af elevstyring

Et af de mest centrale elementer i Allerød-forsøget var forsøget på at håndtere *dilemmaet ved at undervise i orienteret autonomi* som jeg på side 150 karakteriserede således: Hvis man i uddannelsessammenhæng ønsker at udvikle orienteret autonomi – gøre deltagerne "selvstændige på en bestemt måde" – er man på den ene side nødt til at lægge op til elevstyring af arbejdsprocessen og på den anden side nødt til at sikre at den pejling der finder sted, giver processen den ønskede orientering, dvs. får den til at bevæge sig i en retning som er i overensstemmelse med de uddannelsesmæssige mål.

Som nævnt i afsnit 9.3 (side 155ff) var erkendelsen af dette dilemma en del af baggrunden for ambitionen om at eksperimentere med faglige kompetencebeskrivelser som didaktisk virkemiddel. I de forskellige undervisningsaktiviteter i almindelighed og i forbindelse med projektarbejderne i særdeleshed skulle kompetencebeskrivelserne fungere som "ledestjerner" i forhold til at fastholde den ønskede faglige orientering af arbejdsprocesserne.

13.2.1 Kompetenceorientering i praksis

Sådan kom det for projektarbejdernes vedkommende også til at gå i praksis, jf. omtalen på side 198: Alle de otte gennemførte projektarbejder havde en af de udvalgte matematiske kompetencer som eksplicit sigtepunkt, og som gruppe var Karsten og eleverne modige nok til at gå planken ud og fastholde en høj grad af elevstyring som fælles ambition.

Nødvendigheden af fortrolighed med "ledestjernen"

Det viste sig hurtigt at en sådan enighed om ambitionen ikke var tilstrækkelig til at sikre dens realisering. Karsten fik tidligt i forløbet gjort eleverne opmærksomme på de to mest oplagte trusler mod det elevstyrede projektarbejde; at læreren overtager styringen og at processen kommer til at blæse i vinden uden orientering. En sådan erkendelse tror jeg er et nødvendigt fælles grundlag for at muliggøre elevstyret projektarbejde, men at vide hvad man *ikke* skal gøre er jo kun et skridt på vejen frem mod en afklaring af hvordan man kommer konstruktivt videre.

Forarbejdet til projektet havde jo – som beskrevet i kapitel 12 – inkluderet at der stod en række faglige kompetencebeskrivelser til rådighed som virkemiddel. Her følte både eleverne og Karsten sig imidlertid indledningsvist på noget gyngende grund, men samtidig var kompetenceorienteringen af det elevstyrede projektarbejde et aspekt af forsøgsundervisningen hvor der skete en tydelig udvikling undervejs. I en formativ skriftlig evaluering af forsøgsundervisningen fra februar 2002, udarbejdet som oplæg til første møde med den dengang nyligt tiltrådte fagkonsulent[1] for det almene gymnasiums matematikundervisning, beskriver Karsten det selv således under overskriften "projektarbejdet":

> "I starten kæmpede jeg en del med at mestre kompetencestyringen. Jeg havde bla.a. derfor lidt tvivl om dets fordele. Undervejs er jeg dog blevet overbevist : Jeg mener det giver læreren en mulighed for at styre projekterne uden at tage noget fra eleverne. De synes at valget af emne giver dem styringen. Således er det jo idéelt. Men også på et højere plan er det en gevinst : Det giver nemlig anledning til mange frugtbare diskussioner med eleverne om, hvad man lærer og hvorfor. Det må dog retfærdigvis siges at mange elever stadig synes at have problemer med at forstå de forskellige kompetencer og det er jo knap så godt !"

Den sidste sætning antyder det jeg vil betegne som den væsentligste erkendelse Karsten og jeg gjorde i vores løbende evaluering af projektarbejderne: Realiseringen af den fælles ambition om en høj grad af elevstyring stod og faldt i langt højere grad end vi havde forestillet os med om det

[1] Som bestred posten i hele den sidste del af Allerød-forsøget, og derfor er ham jeg i hele dette kapitel refererer til med betegnelsen "fagkonsulenten".

lykkedes eleverne at udvikle fortrolighed med “ledestjernen”. Eller mere konkret: Det stod og faldt med om en given projektgruppe (typisk på 3-5 elever) tilsammen havde så god en føling med den faglige kompetence som Karsten annoncerede som sigtepunkt for et givet projektarbejde, at de kunne lade sig vejlede af kompetenceorienteringen når projektet skulle afgrænses og styres undervejs.

Et eksempel

Som eksempel på nødvendigheden af fortrolighed med “ledestjernen” og elevernes udvikling i den forbindelse kom projektarbejdet i efteråret 2001 utilsigtet til at virke eksemplarisk. Det var det sjette projektarbejde eleverne gennemførte og det tredje med sigte på udvikling af matematisk modelleringskompetence (jf. figur 12.3 på side 199). Det betød at de fleste af projektgrupperne efter min vurdering var godt på vej mod den ovennævnte fortrolighed med “ledestjernen” og følte at de vidste hvilken form for udfordring de gik ind til.

Projektarbejdet havde imidlertid også et andet og for eleverne helt nyt sigte, i og med at det for første (og eneste) gang var tilrettelagt som et tværfagligt samarbejde mellem matematik- og fysikundervisningen og derfor også skulle imødekomme nogle fysikfaglige forventninger. I et efterfølgende interview gav begge lærere udtryk for, at de i forbindelse med den ikke alt for grundige planlægning af det tværfaglige projekt (jf. Karstens omtale på side 2 i appendiks G) havde forestillet sig at det at gennemføre en matematisk modellering af en fysikfaglig problemstilling kunne udgøre et fælles pejlemærke for elevernes arbejde. Da projekterne blev sat i gang og skulle afgrænses viste det sig imidlertid, at de to lærere havde helt forskellige mål for elevernes læring: For Karsten – og eleverne, som jo omhyggeligt var blevet socialiserede ind i hans tilgang til tingene – var der tale om “business as usual” i forhold til de to foregående modelleringsprojekter, nu blot med afsæt i fysikfaglige problemstillinger og mulighed for kompetent vejledning i den forbindelse. For fysiklæreren var det faglige mål med projektarbejdet at eleverne udviklede deres *fysiske eksperimentelle kompetence*, som kort kan karakteriseres som indsigtsfuld parathed til at planlægge, udføre og beskrive fysiske eksperimenter (Dolin (2003, p. 375) og Dolin et al. (2003, p. 118)).

Denne eksplicitering af det fysikfaglige mål med projektarbejdet fandt først sted i forbindelse med det efterfølgende interview med de to lærere. Undervejs kom det kun til udtryk ved at fysiklæreren i sin vejledning holdt eleverne fast på, at de som en del af modelleringsprocessen skulle lave eksperimentelt arbejde med inddragelse af ikke-triviel fysik. Denne fordring til projektarbejdet var både ny for eleverne og altså i det store og hele u-begrundet. Det tolker jeg som den væsentligste grund til at de fysikfaglige krav helt erobrede dagsordenen og derfor kom til at dominere processen, som ikke blev nær så elevstyret som både eleverne og de to lærere ønskede. Blandt eleverne skabte det en del frustration, som jeg oplevede blev forstærket af kontrasten mellem de uklare fysikfaglige mål og elevernes stadig større tryghed ved og deraf følgende forventninger til kompetenceorienteret elevstyring af projektarbejdet i matematikundervisningen.

Et konkret eksempel: Den projektgruppe jeg fulgte tættest[2] markerede ved projektopstarten medio september 2001 interesse for to problemfelter (som var blevet til efter en fælles brainstorm i klassen); betingelserne for at der sker et kædesammenstød på en motorvej og valget mellem forskellige typer lyspærer. De var mest interesserede i den førstnævnte men valgte at gå videre med den sidstnævnte på råd fra fysiklæreren, som gjorde dem opmærksom på det vanskelige ved at gå eksperimentelt til værks i forhold til motorvejssammenstød. En undersøgelse af lyspærer mente han derimod lød som en vældig god ide, men ikke som gruppen foreslog med fokus på hvilken slags pære der bedst kan betale sig, fordi undersøgelsen så ville blive uden fysikindhold og alt for simpel rent modelleringsmæssigt. I stedet foreslog han dem at lave nogle sammenligninger af forskellige pæretypers virkemåde. Også det råd valgte de at følge, men de gav tydeligt udtryk for at de ikke vidste på hvilket grundlag de skulle fortsætte arbejdet med at afgrænse projektet frem mod en problemformulering. Hver gang de på egen hånd forsøgte at komme videre i processen hang de fast i, at de ikke vidste hvilke tilgange der ville tilfredsstille fysiklærerens forventninger og hvilke der ikke ville. Som en af pigerne udtrykte det:

L: "Det er svært både at indtænke eksperimenter og lave en god problemformulering".

Den 12. oktober overværede jeg igen gruppens arbejde i en dobbelt kombineret matematik- og fysiktime. I den mellemliggende periode havde de lavet forskellige eksperimenter med lyspærer. Dataene herfra var de nu i gang med at lede efter sammenhænge i, men de fortalte at de stadig – her en måneds tid efter projektopstarten – ikke rigtig vidste hvad de "havde gang i". Da Karsten lidt længere henne i arbejdet med regressionsanalyserne blev hidkaldt for at hjælpe, fik han det samme at vide med lidt andre ord:

K: "Talbehandlingen er den samme som det plejer, her har I bare selv fabrikeret tallene."

[2] Gruppe 4 bestående af eleverne B, C, E og L, jf. logbogs-forkortelserne gengivet på side 272 og afsnittet om dataindsamlingen på side 204.

B: “Problemet er ikke selve talbehandlingen, men at kunne skrive noget i starten af rapporten om hvorfor vi gør som vi gør.”

Denne bemærkning fra pigen B er dels et udtryk for elevernes frustration over det igangværende tværfaglige projektarbejde, dels et eksempel på at de på dette tidspunkt i forsøgsundervisningen var begyndt at opfatte et klart fagligt fokus som et nyttigt værktøj, og derfor opfattede det som et problem når den faglige orientering pludselig viste sig at være uklar.

Det generelle billede

Generelt blev ambitionen om kompetenceorienteret elevstyring af projektarbejderne mere og mere realiseret efterhånden som forsøgsundervisningen skred frem. Det kom til udtryk på to måder: Dels var der en større og større andel af eleverne – og dermed et flertal i en større og større andel af grupperne – der begyndte at forstå hvad ambitionen egentlig gik ud på og hvad den fælles udfordring i at realisere den bestod af. Dels blev de elever som havde udviklet en sådan forståelse, mere og mere i stand til at omsætte den til konkret handlen når projektarbejderne skulle afgrænses og på anden måde styres.

Denne positive udvikling mener jeg havde to væsentlige årsager. For det første den at eleverne efterhånden fik oparbejdet en del erfaring med kompetenceorienteret elevstyring af et projektarbejde, fordi forsøgsundervisningen var tilrettelagt med mulighed herfor og fordi både de fleste af eleverne og Karsten (med mig som ihærdig “cheerleader”) som nævnt forblev tro mod ambitionen hele vejen igennem. Eleverne fik – og tog sig – helt enkelt tid og rum til at udvikle kompetence i at håndtere og arbejde sig ud af den følelse af usikkerhed som elevstyret projektarbejde uundgåeligt medfører.

Den anden væsentlige årsag var at Karsten blev bedre og bedre til at hjælpe eleverne med etableringen af et nyt projektarbejde frem mod en problemformulering, vel at mærke uden at skylle babyen ud med badevandet ved at overtage styringen af projektet. Et centralt element heri var at Karsten og jeg sammen udviklede den måde han i plenum lagde op til hvert nyt projektarbejde.

13.2.2 Læreroplæg til elevstyret projektarbejde

Allerede inden forsøgsundervisningen startede snakkede Karsten og jeg om, at hovedudfordringen i forbindelse med at lægge op til elevernes projektarbejde bestod i at fastholde den afgørende åbenhed i etableringsfasen (jf. Skovsmose; 1990a, p. 118f) uden at efterlade eleverne ukonstruktivt rådvilde og frustrerede.

Skriftlige "projektkim"

Et af de oplagte virkemidler at tage i anvendelse er det klassiske runddelte ark papir med angivelse af retningslinjerne for det kommende arbejde. Sådan et papir gjorde Karsten det også til en fast rytme at give eleverne forud for hvert projektarbejde. Som det ses i figur 13.1 indeholdt oplægget til det første projektarbejde primært information af praktisk art, fordi Karstens primære fokus var at hjælpe eleverne med at lære at arbejde projektorganiseret[3]. Hvad angår den faglige orientering af arbejdet var der kun generelle anvisninger som pegede tilbage mod de tre tidlige matematiske kulturer eleverne havde arbejdet med forud for første projektarbejde; den ægyptiske, den babylonske og den græske.

Den bevidst uskarpt artikulerede angivelse af den faglige orientering var et udslag af Karstens tidligere omtalte mod til at forsøge at frisætte eleverne og give dem reel medindflydelse, men som det var tilfældet med den ovennævnte manglende fysikfaglige orientering i sjette projektarbejde frustrerede det eleverne, som efterspurgte mere hjælp til at nå frem til en problemformulering. Det fik de så forud for andet projektarbejde i form af nogle "igangsættere", jf. figur 13.2.

Disse spørgsmål og oplæg til beskrivelser var ment som ideer til nogle problemfelter man kunne arbejde videre med at afgrænse eller på anden måde lade sig inspirere af, men for eleverne var det svært at "se rundt om" de direkte formuleringer og selv komme med alternative vinklinger, og der blev reelt tale om at vælge mellem de fremlagte forslag som det direkte oplæg til projektarbejdet. Derfor endte modellen for den skriftlige hjælp til afgrænsningen af projekterne med at blive den jeg har gengivet et eksempel på i figur 13.3: Overskrifter på nogle områder – faglige stofområder eller ekstra-matematiske virkelighedsudsnit alt afhængigt af kompetencen i fokus – som Karsten selv forestillede sig det ville være frugtbart at arbejde inden for, og som eleverne kunne vælge at spørge nærmere til og lade sig inspirere af i arbejdet med at nå frem til en problemformulering.

Modellæring og kognitiv mesterlære

Den væsentligste udvikling i måden Karsten lagde op til hvert nyt projektarbejde drejede sig imidlertid ikke om de skriftlige oplæg. Den centrale udfordring bestod jo som nævnt i at hjælpe eleverne med at blive fortrolige med de forskellige kompetencer som "ledestjerner", og det kan

[3] Eksempelvis lod han dem selv danne grupper (på maksimalt fire personer), så de tidligt kunne få erfaringer med denne ofte lidt hårde sociale proces. Det gik forbavsende uproblematisk, og de fleste elever blev i samme gruppe indtil Karsten forud for fjerde projektforløb dannede nye grupper

PROJEKTRAPPORT 1 : Historisk matematik

PROBLEMFORMULERING : Sammen med mig skal I lave en overskrift, som beskriver. hvad opgaven går ud på. Den skal gerne rumme både matematiske og kulturelle sider.
OMFANG : 5 sider maskinskrevet med 1,5 linieafstand eller tilsvarende incl. de nødvendige illustrationer.
KILDER: Det er almindeligt i sådanne opgaver, at man meddeler hvilke bøger eller andre steder (Internet f.eks.), hvorfra man har hentet sine oplysninger.
KRAV TIL RAPPORT : Der skal være tale om individuelle besvarelser, selvom i har arbejdet i grupper og en del derfor er fælles gods.
BEDØMMELSE : I får hver især en karakter for rapporten, der tæller 2-3 gange et almindeligt hjemmeopgavesæt.
Hvis rapporten opgives til eksamen, vil den kunne danne grundlag for de mundtlige eksamination.
AFLEVERING : Som nævnt i jeres plan : ***FREDAG D:22/9***.
GRUPPEARBEJDET : Sørg for at få alle med i jeres arbejde. Tag notater og aftal selv, hvordan I forbereder jer til næste gang. Det er jeres egne notater, der skal danne grundlag for jeres rapporter. I har 2*3 lektioner i flexugen – og ikke mere. Vi starter vi på nyt stof mandag d.18/9.

KW - 06-09-00

Figur 13.1 Det skriftlige læreroplæg til første projektarbejde i Allerød-forsøget.

selv den mest raffinerede og gennemtænkte formulering af mulige afsæt – opgaver, område-indkredsninger mv. – for udøvelsen og udviklingen af en kompetence ikke klare. Det kræver at man beskæftiger sig med den enkelte kompetences indhold og karakteristika, dens "væsen".

Det arbejdede Karsten og jeg meget med at indtænke i undervisningens praksis. I første omgang foregik det med direkte afsæt i kompetencebeskrivelserne i forsøgsbekendtgørelsen (jf. side 264f). Dem spurgte Karsten til som del af den første skriftlige evaluering af matematikundervisningen, som han gennemførte i starten af oktober 2000 forud for opstarten af andet projektarbejde[4]:

[4] I første projektarbejde var der som nævnt i forrige afsnit primært fokus på andre forhold end kompetenceorienteringen.

IDÈER TIL PROJEKT OM MODELLERING

Hvad er sammenhængen mellem ens indkomst og den skat man betaler ?

Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde sig ?

Hvad er den mest fornuftige form på en konservesdåse ?

Beskriv et barn , der gynger.

Beskriv et kast med en håndbold .

Beskriv en del af et spil ludo.

Beskriv en mand, der vælter med sin cykel.

Hvordan arbejder en landmåler ?

Hvad koster det at tale i mobiltelefon ?

Hvor hurtigt løber vandet ud af en swimmingpool ?

OBS ! Dette er blot nogle igangsættere. Find et område, som I synes kunne være interessant. Stil nogle relevante spørgsmål og prøv at overveje, hvilken matematik, der kunne blive brug for til en matematisk beskrivelse. Sæt jer sammen med dem I tror I arbejder bedst med eller dem, som har kan blive enige om et emne med. I skal ikke nødvendigvis beslutte jer for noget som helst i dag !

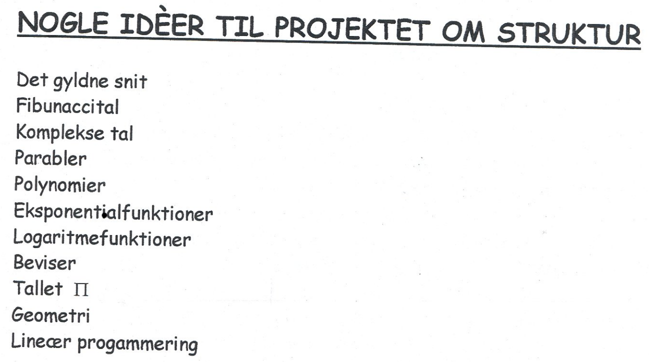
KW - 2000-10-4

Figur 13.2 Det skriftlige læreroplæg til andet projektarbejde i Allerød-forsøget.

> "Vores bekendtgørelse arbejder med begrebet kompetence og har angivet hvilke, vi skal opøves i. Gør kort rede for hvilke kompetencer, du synes du har trænet i undervisningen indtil nu og hvor disse kompetencer er blevet brugt:"

Herefter fulgte en oplistning af de ni matematiske kompetencer vi opererede med, og tilhørende tomme linjer til at skrive på.

De skriftlige besvarelser af dette evalueringspapir og de gruppevise diskussioner i forbindelse hermed viste meget tydeligt, at denne fremgangsmåde ikke var fyldestgørende. Eleverne havde meget svært ved at forholde sig så abstrakt til de faglige kompetencers forskellige indhold og tyngde og inddrog slet ikke kompetenceovervejelserne i det efterfølgende projektarbejde. Det illustreres dels af, at der i forbindelse med opstarten ikke var nogle konstruktive kommentarer som refererede tilbage til indholdet



NOGLE IDÈER TIL PROJEKTET OM STRUKTUR

Det gyldne snit
Fibunaccital
Komplekse tal
Parabler
Polynomier
Eksponentialfunktioner
Logaritmefunktioner
Beviser
Tallet Π
Geometri
Lineær progammering

Figur 13.3 Det skriftlige lærereoplæg til fjerde projektarbejde i Allerød-forsøget. Oplægget indeholdt også et her udeladt afsnit om gruppeinddelingen og samarbejdet i hver gruppe.

af evalueringsdiskussionen, dels af at ingen af de fem projektrapporter jeg læste i, indeholdt refleksioner over indholdet af eller karakteristikaene ved matematisk modelleringskompetence, som var det givne sigtepunkt. Rapporten fra eleven N, som er optrykt først i appendiks F, eksemplificerer dette.

Ved opstarten af tredje projektarbejde gjorde Karsten meget ud af at snakke med eleverne om det forestående sigtepunkt; udvikling af matematisk anvendelseskritisk kompetence. Det foregik dog stadig på en måde der – med de senere erfaringer in mente – var for abstrakt til effektivt at sætte eleverne på sporet. Ved endnu en skriftlig evaluering af forsøgsundervisningen i starten af februar 2001 blev kompetencestyringen af projektarbejderne fremhævet som noget af det der voldte eleverne problemer, og under den ledsagende gruppevise mundtlige evalueringssnak efterspurgte flere af eleverne nogle mere konkrete eksempler på hvordan det kunne gribes an.

Det kastede Karsten sig derfor ud i i forbindelse med fjerde projektarbejde, som blev igangsat kort efter denne evaluering. Det foregik ved at han orkestrerede en fælles brainstorm og kollektiv sparring, hvor eleverne skulle formulere forskellige spørgsmål som man kunne stille med afsæt i et konkret matematisk begreb – logaritmer – som eleverne lige havde arbejdet med. De forskellige forslag blev skrevet ned på tavlen, suppleret med angivelse af den eller de faglige kompetencer som klassen diskuterede sig frem til at det enkelte spørgsmål kunne bruges som afsæt til at udvikle. Her er min syntese af hvad de nåede frem til, med en tilsigtet fokusering på strukturel kompetence som var sigtepunktet for det forestående projektarbejde:

- Hvad er logaritmer? (strukturel kompetence)
- Hvad er det smarte ved logaritmer? (strukturel kompetence)
- Hvem fandt på det med logaritmer? (kultur-historisk kompetence)
- Hvordan kom man frem til logaritmer? (strukturel kompetence og kultur-historisk kompetence)
- Hvorfor fandt man på det med logaritmer? (strukturel kompetence og kultur-historisk kompetence)
- hvad er decibel for noget? (anvendelseskritisk kompetence)

Af den efterfølgende gruppevise afgrænsningssnak fremgik det, at mange af eleverne synes en sådan perspektiveret brainstorm var en god og mere konkret måde at diskutere de forskellige faglige kompetencer indhold og indbyrdes forskelle og ligheder. Den gruppe jeg observerede var også tydeligvis hjulpet af brainstormen i deres arbejde med at nå frem til en problemformulering for projektarbejdet, men i den resterende del af arbejdet virkede det ikke til at spille nogen rolle.

Det er der – i bagklogskabens klare lys – for mig at se ikke noget mærkværdigt ved. Det at have fundet frem til et spørgsmål som nogen mener er velegnet som afsæt for udviklingen af en given kompetence, medfører ikke at alle der begynder at arbejde med spørgsmålet faktisk udvikler eller udøver kompetencen. Det kræver ofte at man i situationen *vælger* at håndtere udfordringen ved at handle på en måde som rummer (nogle af) de karakteristiske træk ved denne kompetence, og dermed implicit fravælger andre mere eller mindre oplagte tilgange til spørgsmålet.[5]

Denne erkendelse var baggrunden for et udviklingstiltag, som jeg i den tidligere gengivne korrespondance fra december 2000 (se side 200ff) foreslog Karsten at samarbejde om:

> “Vedr. projektforløbene: Her har vi jo vha. kompetencebeskrivelserne forsøgt indbyrdes at klargøre, hvad ‘pejlemærket’ for de enkelte forløb er. Udfordringen frem ad banen består i at udvikle metoder, som du kan bruge til at komme i dialog med eleverne om disse pejlemærker, da det jo tilsyneladende er meget centralt for projektarbejdets succes at de er med på, hvilken ‘bold’ der gås efter.
>
> Mit forslag går som nævnt på, at vi udvikler nogle forslag til problemstillinger (mindre velafgrænsede end hvad det ville være hensigtsmæssigt at kræve af en problemformulering) ift. hvert fokusområde (kompetence), som kan danne udgangspunkt for den videre afgrænsning af arbejdet.

[5] Jf. definitionen af “kompetence” på side 123 og analysen af forholdet mellem problemorientering og eksemplaritet på side 151ff.

> Dette arbejde synes jeg bør foregå i fællesskab, igen meget gerne med kommentarer og bidrag fra Erik. I relation til enkelte af disse problemstillinger (fx. en ift. hver type projektarbejde) kan vi så udvikle hvad jeg vil kalde 'konstruerede eksemplariske didaktiske forløb', dvs. måder at arbejde med problemstillingen på, som viser den 'skæring', vi er ude efter, og som du kan snakke igennem med eleverne. Ift. denne del af udviklingsarbejdet er det naturligt at jeg spiller ud, når vi er blevet enige om nogle velvalgte problemstillinger."

Ved opstarten af femte projektforløb – helt præcist den 24. april 2001, jf. logbogen herfra gengivet på side 269f – tog Karsten skridtet fuldt ud i forhold til denne udfordring. For anden gang var det udvikling af matematisk modelleringskompetence der var sigtepunktet. Det lagde han (som tidligere) op til at snakke om ved hjælp af et spørgsmål – Hvad er den bedste beholder til fx mælk? – som han og eleverne i fællesskab kom frem til nogle mulige svar på.[6] Med afsæt i hver af disse tilgange til hvad man vælger at forstå ved "bedst" guidede Karsten eleverne igennem en idealiseret modelleringsproces (med vægt på systematisering og matematisering, som var de delprocesser eleverne nemmest kunne forholde sig til uden faktisk at have opstillet en model), som blev udfoldet ved hjælp af den model af processen som jeg havde introduceret (se side 113ff), og som eleverne fik udleveret en kopi af. Det meget intense og koncentrerede forløb varede 50 minutter i alt.

Denne form for "stand up-modellering" – eller mere generelt "stand up-kompetenceudøvelse" – er en kompetenceorienteret variant af det element i kognitiv mesterlære som betegnes *modellæring*:

> "Modellæring er noget helt centralt i kognitiv mesterlære. Læreren tænker højt, når han fx løser et matematisk problem og fungerer som mester og træner, samt støtter eleven i udvikling af strategier for tænkning og problemløsning. Kognitiv mesterlære omfatter en række forskellige læreteknikker: Modellæring, stilladsbygning og refleksion baseret på observation, vejledende og støttende lærerdeltagelse. Altsammen her til formål, at eleven tilegner sig kognitive og metakognitive færdigheder. Eleverne opmuntres til at reflektere over problemer, mens lærerens rolle består i gradvis at trække sin støtte tilbage og derved på ny give eleverne ansvaret for problemløsningen [...]." (Nielsen & Kvale; 1999, p. 27)

Disse begreber kan bruges til at skærpe karakteristikken af udviklingen i Allerød-forsøget med hensyn til muliggørelsen af elevstyring: Der var som jeg ser det tale om systematisk brug af kognitiv mesterlære, med gradvis større erkendelse af potentialerne ved modellæring og deraf følgende forsøg

[6] Den der ser smartest ud, den der er bedst at holde på, den der er mindst materialekrævende eller den der er bedst at transportere.

på at praktisere denne undervisningsform så ofte og så rendyrket som det var muligt (jf. næste afsnit).

Denne udvikling er det mit indtryk at alle parter oplevede som en frugtbar del af forsøget. For Karstens vedkommende underbygges det af hans slutrapport (appendiks G), hvor projektarbejdet og hans arbejde med at vejlede eleverne i den forbindelse fremstår som den del af forsøget han ser tilbage på med største glæde. For elevernes vedkommende underbygges det af svarene i det afsluttende spørgsskema (jf. side 384ff): Her kommer 15[7] af de 25 elever med positive svar på spørgsmålet "Hvad synes du om måden de enkelte projektforløb blev igangsat på?", og kun to[8] elever svarer decideret negativt.

13.3 Lærerens kompetencer og ressourcer

Kompetenceorienteret undervisning i almindelighed og fokus på udvikling af matematisk modelleringskompetence i særdeleshed fordrer meget af læreren både pædagogisk, fagdidaktisk og fagligt.

Pædagogisk og almen didaktisk fordi det inviterer til at inddrage eleverne i mange af de centrale overvejelser vedrørende undervisningen som derfor skal være præget af en høj grad af elevstyring. Det skal på mange områder være en kollektiv udfordring at få undervisningen til at fungere efter hensigten, hvilket gør det nødvendigt for læreren at udvikle nye former for identitet og autoritet i klasserummet og at kunne indtage mange forskellige roller i forhold til eleverne (Elbow; 1979).

Fagdidaktisk fordi det at arbejde med målstyret tilrettelæggelse og evaluering af undervisning inviterer til at arbejde med mange forskellige undervisnings- og evalueringsformer alt afhængig af hvilket fagligt mål (kompetence) der er omdrejningspunktet. Når man ekspliciterer de faglige mål med undervisningen gennem faglige kompetencebeskrivelser tydeliggøres både behovet for at arbejde målstyret og for at differentiere tilrettelæggelsen og evalueringen i lyset heraf.

Fagligt fordi den brede opfattelse af faglighed som beskrivelsen ved hjælp af en "blomst" med mange forskellige kompetencer er udtryk for (jf. figur 4.1 på side 83), også udfordrer lærerens egen faglige bredde og tyngde. Det er svært at forestille sig at man kan iscenesætte og støtte andres udvikling af kompetencer man ikke selv har udviklet i betydelig grad.

Jeg tror ikke der findes nogen danske gymnasielærere der på alle disse

[7] Elev nr. 1-4, 7, 9-11, 14, 16-19, 21 og 25.
[8] Elev nr. 15 og 24.

forskellige områder har fuldt tilstrækkelige ressourcer og kompetencer til at møde den stadig ret nye udfordring det er systematisk og eksplicit at undervise kompetenceorienteret. Det havde Karsten naturligt nok heller ikke, selv om han efter min vurdering var virkelig godt klædt på til at stå i spidsen for undervisningen i Allerød-forsøget. Det skyldes ikke mindst hans pædagogiske ressourcer og kompetencer der i høj grad matcher fordringerne nævnt ovenfor, hvilket gjorde ham til en af de bedste samarbejdspartnere både jeg og klassens elever kunne få.

Jeg håber derfor ikke at det skygger for indtrykket som læser af min meget positive oplevelse af Karstens indsats som lærer i Allerød-forsøget, når jeg nedenfor peger på to områder hvor jeg oplevede at begrænsninger i hans ressourcer og kompetencer udgjorde en hindring for "utopien om en fuldstændig realisering af 'den gode praksis'", jf. forskningsspørgsmålet gengivet på side 175.

13.3.1 Betydningen af egen faglige kompetence

Karstens udgangspunkt for at være matematiklærer i det almene gymnasium er temmelig utraditionel. Uddannelsesmæssigt har han bifag i matematik og hovedfag i musik, og arbejdsmæssigt er det også disse to fag han underviser i, ved siden af lidt bibeskæftigelse som professionel trompetist.

Den baggrund har jeg oplevet som en styrke i forhold til at arbejde med den brede tilgang til fag og faglighed som implicit lå bag Allerødforsøget, men den er givetvis også en af forklaringerne på, at Karstens egen besiddelse af de matematiske kompetencer som var i fokus viste sig at have begrænsninger som gjorde det svært for ham at håndtere nogle af forsøgsundervisningens udfordringer.

Det gjaldt blandt andet ambitionen om eksplicit at gøre matematisk problemløsning til genstand for undervisning, jf. Karstens egen påpegning af vanskeligheder i den forbindelse i korrespondancen citeret på side 200f. Det gjaldt også forskellige sider af støtten til elevernes udvikling af matematisk modelleringskompetence, fx opstarten af projektarbejderne med dette sigte (jf. omtalen i forrige afsnit) og udviklingen af elevernes refleksive bevidsthed (jf. omtalen på side 81) i forbindelse med den efterfølgende projektvejledning.[9]

Konstateringen af at begrænsninger i Karstens egen matematiske kompetence udgjorde en af hindringerne i forsøgsundervisningen rejser to for-

[9] Eksempelvis kom denne del at vejledningen kun sjældent ind på det Ole Skovsmose (1988, p. 28) betegner de indgående modellers *synkrone* forbindelser med omgivelserne og vejledningen inkluderede slet ikke diskussioner af de *diakrone* forbindelser (Ibid., p. 36).

bundne spørgsmål som jeg ikke er gået ind i en nærmere analyse af i dette projekt, men som jeg mener fortjener nærmere undersøgelser:

- Hvad kan der siges om *forholdet* mellem en lærers fagdidaktiske og faglige kompetence? Er det eksempelvis sådan at de metodiske og fagdidaktiske vanskeligheder som var tydelige for alle parter i forbindelse med opstarten af projektforløbene ikke så meget kaldte på didaktisk fantasi og opfindsomhed (som var der hvor Karsten og jeg i situationen forsøgte at "opruste", jf. afsnit 13.2.2) som på udvikling af Karstens faglige kompetence, fordi det var der han havde sin "lærerfaglige flaskehals"?
- Hvilken betydning for dette forhold har det at fokusere på faglige kompetencebeskrivelser? Er det eksempelvis sådan at Karstens oplevelse af den eksplicitte kompetenceorientering som både perspektivrig og udfordrende på grænsen til det udmattende skyldes at det tydeliggør behovet for at samtænke fagdidaktiske og faglige overvejelser?

13.3.2 Betydningen af overskud og nærvær

Karstens ovennævnte meget veludviklede pædagogiske kompetencer hviler som jeg ser det på en bund af grundlæggende respekt og interesse for sine elever som medmennesker og en ægte glæde ved det at undervise. Den entusiasme var med til at give ham overskud og nærvær i forhold til at møde de mange udfordringer forsøgsundervisningen bød på, ikke mindst i starten hvor meget var nyt og uprøvet for alle.

En sådan indstilling fra lærerens side vil selvfølgelig altid være en vigtig ingrediens i god undervisning, men den bliver afgørende for om tingene står eller falder når undervisningen for en stor dels vedkommende er baseret på etablering og vedligeholdelse af bestemte læringskulturer ved hjælp af mesterlære, jf. forrige afsnit. Så er entusiasme og glæde ved at møde bestemte former for udfordringer en væsentlig del af det der forsøges overdraget fra lærer til elever.

Hvor vigtigt Karstens overskud og nærvær var for oplevelsen af et succesfuldt forløb blev for alvor klart da der i løbet af forsøgsundervisningens andet år blev mindre af det. Det hang sammen med at der i skoleåret 2001/2002 skete nogle ændringer i Karstens privatliv som bl.a. indebar at han flyttede til Odense og pendlede til og fra Allerød Gymnasium. At han valgte en sådan løsning viser hans loyalitet overfor projektet; hans deltagelse i forsøgsundervisningen var en af de væsentlige grunde til at han opretholdt en deltidsansættelse i Allerød, men turbulensen i almindelighed og pendlertilværelsen i særdeleshed medførte helt naturligt at han blev mindre nærværende både fysisk og mentalt, hvilket både han, jeg og eleverne mærkede og snakkede om. Elevernes opmærksomhed på den side af forsøgsundervisningen illustreres af at det er noget de kommer ind på flere forskellige steder i spørgeskemabesvarelserne (appendiks H), fx. i kommentaren om Karstens indsats fra elev nr. 7 (jf. side 405):

> "Generelt synes jeg egentlig at han gjorde det meget godt. Men jeg har haft indtryk af, at han var mere interesseret i projektet i starten end i slutning. Måske havde det noget at gøre med, at han flyttede til Fyn."

Karsten er også selv indirekte inde på sagen på side 5 i slutrapporten (appendiks G):

> "Tilbage står desværre, at vi nok ville lidt for meget på én gang: Man burde lave forsøg, kun med projektarbejde og et lidt begrænset pensum; og et forsøg med problemorienterede opgaver uden projekter for, på trods af de nederlag, vi her har lidt, tror jeg stadig på begge idéerne – bare ikke samtidigt !"

Jeg er enig i at vi spændte buen hårdt hvad angår omfanget af elementer der blev forsøgt nytænkt i forsøget (det højt prioriterede elevstyrede projektarbejde, kompetencestyring, modelleringsfokus, den problemcentrerede didaktiske kontrakt i kursusdelen, behovet for nye ikke-eksisterende opgavetyper i den forbindelse, nye eksamensformer). Som tilrettelæggelsesmodel har Allerød-forsøget dog kun bekræftet mig i det fornuftige i at samtænke disse mange forskellige centrale forhold, fordi de – i de perioder af forsøgsundervisningen hvor vi for alvor "fik klaveret til at spille" – støttede og supplerede hinanden helt som det var tiltænkt. At naturlige begrænsninger i lærerens ressourcer og kompetencer så kan vise sig at udgøre en hindring for modellens totale omsætning til praksis anser jeg i et lidt bredere tilbageskuende perspektiv som et af projektets forskningsresultater.

13.4 Den afsluttende skriftlige eksamen

Hvad var det egentlig der skete henover sommeren 2002 omkring den afsluttende skriftlige eksamen med hjælpemidler?

Som jeg beskrev på side 210f fik Karsten og eleverne medhold i en klage over opgaverne i det først stillede opgavesæt fra maj 2002 og de elever som sagde ja til tilbuddet blev derfor reeksamineret i august. Begge gange fik eleverne generelt relativt lave karakterer, hvilket nok var den væsentligste årsag til at både de og Karsten (jf. slutrapporten gengivet som appendiks G) umiddelbart efter forsøgsundervisningens afslutning følte sig usikre på, om det samlede forløb og de læringsmæssige resultater det havde afstedkommet, nu også havde været så tilfredsstillende som de inden den afsluttende eksamen havde oplevet det.

Det uskønne eksamensforløb var som jeg ser det et resultat af, at der var tale om en centralt stillet og bedømt skriftlig eksamen som afslutning på et undervisningsforløb der afveg en del fra det normale. Jeg vil i den forbindelse efter tur analysere to problemfelter, som jeg mener erfaringerne fra Allerød-forsøget peger på fortjener opmærksomhed, fordi de truer med at stille sig i vejen for realiseringen af "den gode praksis". Det første problemfelt jeg kaster mig over vedrører forholdet mellem evaluering og udvikling af klasserumskultur, det andet vedrører kriterierne for bedømmelsen af elevpræstationerne.

Analysen tager afsæt i en forståelse af begrebet "evaluering" som en proces der indebærer mere eller mindre eksplicit gennemførelse af tre delprocesser (jf. Niss; 1993):

Karakteristik af hvad man er på udkig efter.
Identifikation af i hvilket omfang det man er på udkig efter er til stede i evalueringssituationen.
Bedømmelse af det identificerede.

13.4.1 Ekstern evaluering og klasserumskultur

Når man diskuterer kvaliteten af en konkret evalueringsform refereres der ofte til to kriterier:

Validitet: Måler evalueringen det, den søger at måle?
Reliabilitet: Er evalueringen pålidelig ("bedømmer-uafhængig")?

Ved udformningen af en konkret evaluering vil det være naturligt at tilstræbe en kombination af høj validitet og høj reliabilitet, hvis man mener det er inden for praktisk rækkevidde. Det vil det være hvis det man er på udkig efter kan karakteriseres og udfordres på en så ligefrem måde at identifikations- og bedømmelsesdelen af evalueringen bliver simpel at gennemføre. Det gælder eksempelvis hvis multiple choice-spørgsmål eller oplæg til at udøve simple færdigheder (jf. begrebsafklaringen på side 125) kan indfange ambitionen.

I Allerød-forsøget var det ikke tilfældet. Her havde vi allerede tidligt i forløbet formuleret ambitionen med den skriftlige eksamen med hjælpemidler ved i forsøgsbekendtgørelsen at karakterisere det vi skulle være på udkig efter, således (jf. gengivelsen på side 268):

> "Opgaverne udformes mhp. at give eksaminanderne mulighed for at demonstrere, i hvilken grad de hver især har udviklet problemhåndterings-, symbolbehandlings- og ræssonementskompetence inden for centrale dele

> af de fem kerneområder. Mindst en af opgaverne skal være valgfri." (Essen et al.; 2000, p. 58)

Med en formulering som denne udnyttes det potentiale kompetencebeskrivelser har med henblik på at eksplicitere nogle ikke-trivielle ambitioner med en given undervisning. Som analysen i afsnit 13.2 illustrerer er der imidlertid langt fra at have udvalgt og navngivet sådanne kompetencer til at have formidlet deres "væsen". Det betyder at en kompetencekarakteristik umiddelbart gør de dele af en evaluering der handler om at udfordre, identificere og bedømme, alt andet end simple at gennemføre, og derfor er det forventeligt at det naturlige mål om at kombinere høj validitet og høj reliabilitet bliver vanskeligt at realisere. Det skaber den udfordring der altid ligger i at skulle forvalte en situation som man på forhånd ved nok ikke bliver som man ideelt set kunne ønske sig den, og hvor derfor er en fare for at det bedste bliver det godes værste fjende.

Høj validitet vs. høj reliabilitet som udgangspunkt

Den udfordring kom vi – Karsten og jeg – og "systemet" repræsenteret ved fagkonsulenten til fra "hver sin side". Firkantet sat op havde vi et krav om høj validitet som udgangspunkt for at arbejde for at reliabiliteten blev så høj som muligt, mens det for "systemet" som jeg tolker det var omvendt.

Min optagethed af at sikre høj validitet skyldtes både dengang og nu evalueringens indvirkning på undervisning og læring. Hvis validiteten af en evaluering er høj kan den bruges til at holde undervisning og læring på ret kurs, hvorimod en evaluering med lav validitet meget nemt risikerer at virke som "sirener" i forhold til at holde kursen (jf. begrundelsen for ankerposition 4 på side 139). Konkret i forhold til den skriftlige eksamen med hjælpemidler var det derfor vigtigt at opgaverne var af samme type som dem vi omhyggeligt havde konstrueret (jf. appendiks C) og brugt til at udfordre de faglige kompetencer i fokus, og som i sig selv udgjorde en vigtig del af grundlaget for elevernes forståelse af ikke mindst matematisk problemløsningskompetence.

Karstens optagethed af validiteten havde afsæt i hans "faglige omsorg" for eleverne; de måtte ikke ende med at opleve den afsluttende eksamen som en aktivitet der var uden nævneværdig forbindelse til selve forsøgsundervisningen og derfor ikke ydede dem retfærdighed som forsøgselever. Det fremgår bla. af følgende kommentar på side 5 i slutrapporten (appendiks G):

> "Mine egne største bekymringer før vi startede dette forsøg var
>
> 1) Hvordan sikrede vi, at de svage elever kunne komme i gang med de skriftlige opgaver og

2) Hvordan kunne vi evaluere elevernes "nye" færdigheder, dvs dem, der kom ud væsentligst af projektarbejdet, men også af at systematisere og afgrænse problematikker fra "virkeligheden"."

"Systemets" tilgang til spørgsmålet om validitet og reliabilitet fremgår bla. af et brev fagkonsulenten d. 24. juni 2002 skrev til Karsten og ledelsen på Allerød Gymnasium. I brevet, som var et oplæg til et møde i forlængelse af den indgivne klage over den skriftlige forsøgseksamen fra maj 2002, kommenterer fagkonsulenten arbejdet med at udforme opgaver hertil. Det sker bla. med reference til terminsprøven, som Karsten og jeg havde udformet (jf. gengivelsen af begge opgavesæt i appendiks E), og nogle udvalgte elevbesvarelser med rettelser, som Karsten havde sendt til fagkonsulenten forud for arbejdet med opgaverne til maj-eksamen:

> "Jeg har naturligvis diskuteret det [terminsprøvesættet] længe og mange gange med [X] og [Y] for at trække på deres erfaringer som tidligere fagkonsulenter, og holdningen dér var entydig: et sæt af denne type kunne vi ikke stille til en skriftlig eksamen. Det var der flere grunde til – opgaverne var alt for vanskelige, så åbne opgaver egner sig slet ikke til en 4 timers prøve og andet.
>
> Men hovedindvendingen drejer sig om den anden vanskelighed ved at lave et sådan eksamenssæt: Elevbesvarelserne skal kunne evalueres af eksterne censorer. Og evalueres betyder i denne sammenhæng helt grundlæggende, at der skal være en klar opfattelse af, hvornår en besvarelse er i top, er middel, er lige bestået eller ikke bestået. Og her må vi tils[t]å, at det grundlag kunne og kan vi ikke se i opgavetyperne fra terminsprøven. Hvordan ser besvarelser til karakteren 11 ud af :
>
> - 1A: Modeller hvor mange elevatorer der er brug for i et stormagasin med mange etager.
> - 1C: Modeller hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.
>
> Vi blev endnu mere forvirrede af rette-kommentarerne og de point eleverne blev tildelt.
>
> Et ikke uvæsentligt element i dette spørgsmål er elevernes retsstilling. De må ikke på nogen måde føle at de er overladt til vilkårlige og subjektive vurderinger.
>
> Dette er baggrunden for at opgaverne fik den udformning de gjorde. Samtidig med at det åbne blev fastholdt er det alligevel klart, hvad der kræves for at en besvarelse er i top osv. Censorerne blev dermed i stand til – gennem en meget grundig gennemarbejdning af jeres forsøgsbekendtgørelse – at give point for de forskellige kompetencer, eleverne demonstrerede."

Bemærkningen i dette citats næstsidste afsnit om at eleverne "må ikke på nogen måde føle at de er overladt til vilkårlige og subjektive vurderinger" er en anden måde at sige, at fagkonsulenten havde et krav om høj reliabilitet som præmis for udformningen af eksamensopgaverne.

Som direkte oplæg til dette arbejde sendte Karsten Wegener og jeg ham en samling opgaver som var tænkt som vejledende eksamensopgaver i problemløsning. Opgavesamlingen, som er gengivet som appendiks D, består af den mest "Allerød-prototypeagtige" del af opgaverne udviklet til korterevarende opgaveløsning i forsøgsundervisningen, jf. omtalen af optavetyper på side 195. Med afsæt i disse opgaver, som vi havde defineret til at have høj validitet, er eksamensopgaverne fra maj 2002 så tilsyneladende blevet til ved at formulere sig mere og mere udfoldet og med mindre og mindre behov for fortolkning af de indgående spørgsmål, indtil man havde opnået den ønskede grad af reliabilitet. Herefter kunne alle involverede så konstatere hvilken grad af validitet det havde vist sig muligt at opretholde.

Problemet ved en sådan tilgang er at der er stor risiko for at ende i en "Storm P.-situation": Opgaverne bliver formuleret på en måde så der – jf. figur 13.4 – er så meget "lys" over foretagendet at enhver kan forstå og bedømme både spørgsmål og alle de mulige svar, men den del af læringen der kastes lys over er ikke den del man er interesseret i at afdække.

Figur 13.4 Stribe af Storm Petersen. Gengivet med venlig tilladelse fra Storm P-museet i København.

Kultur-baserede evalueringsformer

Der viste sig altså at være stor afstand mellem det vi "insidere" i Allerødforsøget opfattede som evalueringsopgaver med høj validitet og det fagkonsulenten som "outsider" vurderede ville være evalueringsopgaver med høj reliabilitet. Den afstand har jeg ikke fundet nogle hurtige og nemme veje til at minimere eller helt fjerne, hverken mens forsøget var igang eller efterfølgende. Det kan selvfølgelig skyldes at jeg endnu ikke har analyseret problemstillingen til bunds, men er del af forklaringen tror jeg nu også ligger i, at der er et iboende modsætningsforhold mellem ekstern evaluering og udvikling af særlige former for klasserumskultur, som ikke sådan lige lader sig opløse: Det er simpelthen problematisk at gennemføre ekstern evaluering af forsøgsundervisning der arbejder med en anden opgavekultur og andre bedømmelseskriterier, som eksterne opgavestillere og censorer har vanskeligt ved at lægge til grund for bedømmelsen hvis ikke de selv er blevet indsat i klasserumskulturen ved løbende at have fulgt forsøget tæt, hvilket er meget ressourcekrævende.

Som illustration heraf er formuleringen "Modellér ... ", som optræder i mange af de udviklede standardopgaver (appendiks C), ikke udtryk for at opgaveformuleringen tænkes alene at kunne sikre en bestemt orientering af elevernes arbejde (jf. omtalen af tautologiske betragtninger på side 155). Det er en slags "internt kodesprog" som kun giver mening fordi det refererer til udviklingen af en fælles forståelse af og erfaring med, hvilken arbejdsproces der inviteres til med opgaver af denne type. I forhold til klasserumskulturen udviklet i Allerød-forsøget er det vigtigt for validiteten af disse opgaver at afkodningen af hvad det vil sige at modellere en problemstilling er en integreret del af udfordringen, men det er samtidig det der gør det vanskeligt at sikre høj reliabilitet.

Hvis man som jeg mener at høj evalueringsmæssig validitet er afgørende for matematikundervisningens muligheder for at trives og udvikle sig, må man gøre det til en præmis for arbejdet med en konkret evalueringsform, og så med det udgangspunkt udvikle metoder til at øge reliabiliteten (se fx Wiliam; 1994). Én tilgang er at arbejde med udviklingen af en evalueringskultur blandt alle som har med et givet uddannelsesfelt (fx gymnasiefaget matematik) at gøre; en fælles opfattelse af hvordan man karakteriserer, identificerer og bedømmer det man er på udkig efter i en given evalueringssammenhæng.

I det små forsøgte vi at gå i den retning i Allerød-forsøget (utilstrækkeligt, skulle det altså vise sig). Det skete væsentligst ved hjælp af de udviklede opgaver, som bla. blev udformet med henblik på at bidrage til en fælles forståelse af de forskellige faglige kompetencers "væsen" mellem os tæt på forsøgsundervisningen og fagkonsulenten som repræsentant for dem der skulle stå for den eksterne summative evaluering, jf. den ovennævnte udarbejdelse af vejledende eksamenopgaver (se appendiks D). For at hjælpe en sådan udbredelse af den udviklede klasserumskultur på vej holdt Karsten, jeg og fagkonsulenten to møder i foråret 2002, hvis hoveddagsorden var at blive enige om form og indhold for den skriftlige eksamen i maj samme år.

Noget vi alle tre ønskede os, men desværre ikke andet end sporadisk nåede og orkede at gøre, var at udvikle og indbyrdes diskutere eksemplariske tænkte og/eller autentiske elevbesvarelser. Det ville ellers formodentlig have været en stor hjælp, fordi man herigennem direkte kan diskutere evalueringsgrundlaget, og det er da også en metode til kulturel udvikling som er på vej frem, at dømme efter følgende indlæg fra fagkonsulenten i gymnasiematematiklærernes fagblad:

> "Vil der blive udarbejdet eksemplariske besvarelser af nogle af de nye typer opgaver[10] til skriftlig eksamen, har flere kolleger spurgt. Nej det vil der ikke.
>
> Det ligger næsten i sagens natur. Hvorfor i alverden skulle man inddrage sådanne nye opgavetyper og matematiske kompetencer i gymnasiefaget, hvis det dybest set bare drejede sig om at lære eleverne at gentage bestemte formuleringer fra eksemplariske besvarelser til stikprøveopgaver eller andre opgavetyper, hvor eleverne hovedsageligt skal svare med sprog. I sådanne opgaver er der ikke ét svar på, hvordan en besvarelse til fuldt pointtal ser ud. [...]
>
> I stedet for 'eksemplariske besvarelser' af nye opgavetyper, kan det være en god ide at diskutere kvaliteten af autentiske elevbesvarelser. Det er gjort på en del regional- og skolemøder i de senere år, og det vil jeg bestemt bidrage til, at vi fortsætter med." (Grøn; 2007, p. 12)

13.4.2 Uenighed om bedømmelseskriterierne

Nu til det andet af de to eksamensrelaterede problemfelter som jeg her vil analysere; kriterierne for bedømmelsen af elevpræstationerne.

Efter de meget anderledes eksamensopgaver fra maj 2002 benyttede de fleste af eleverne fra Allerød-forsøget sig af muligheden for en omeksamen i august, jf. omtalen på side 211. Her mindede opgaverne til prøven med hjælpemidler meget om de vejledende eksamensopgaver Karsten og jeg havde sendt fagkonsulenten (jf. appendiks D og E), så denne del af eksamen havde derfor efter vores mening høj validitet. Til gengæld viste de sig at have lav reliabilitet; Karsten og jeg bedømte generelt elevernes besvarelser markant mere positivt end de to censorer, som fagkonsulenten endda havde udpeget fordi han mente de ville være blandt de bedste til at sætte sig ind i forsøgets ambitioner og som da også efter alles mening gjorde et meget grundigt og samvittighedsfuldt stykke arbejde.

[10] Som er blevet til i forbindelse med gymnasiereformen af 2005. Senere i teksten gives dette eksempel:

"Vil indtagelse af urtete styrke helbredet hos de ældre? Dette ønsker en gruppe studerende at undersøge. Over en periode på 6 måneder besøger de nogle tilfældigt udvalgte beboere på et plejehjem og serverer urtete for dem. Efter 6 måneder viser det sig, at de beboere, der fik serveret urtete, faktisk har færre sygedage, end de som ikke fik serveret noget. De studerende publicerer resultatet af deres undersøgelse under overskriften: 'Urtete styrker helbredet hos de ældre'.

a) Kommenter denne påstand ved at stille mindst tre kritiske spørgsmål til undersøgelsen."

At reliabiliteten var så lav som det var tilfældet opfattede jeg dengang som overraskende, men fagkonsulenten havde med sit kendskab til censorernes virke forudset problemet. Med reference til terminsprøven og nogle udvalgte elevbesvarelser med rettelser som han havde fået tilsendt, skriver han således i det førnævnte brev til Karsten og ledelsen på Allerød Gymnasium af 24. juni 2002:

> "[...] Som jeg skrev til dig var du ikke uvenlig i dine rettelser og karaktergivning. Det er jo også et 'dogme', at et forsøg ikke må gå galt forstået på den måde, at det ikke er eleverne, men faget vi laver forsøg med. Det må altså ikke gå galt karaktermæssigt og ikke gå galt med det faglige niveau. Noget af dette er selvsagt lettere at styre ved terminsprøver og årsprøver end ved selve eksamen. Hvis en prøve som terminsprøven var stillet til den skriftlige eksamen og besvarelserne var blevet rettet af to vilkårlige censorer fra censorkorpset var det helt sikkert gået så galt, at dogmet ikke kunne holde."

Det fik han jo desværre ret i, men hvorfor gik det sådan? Hvorfor bedømte censorerne elevbesvarelserne markant mindre positivt end Karsten og jeg?

Det gjorde de efter min vurdering på grund af regulær uenighed om bedømmelseskriterierne. Jamen, kunne man indvende, de står jo sort på hvidt i forsøgsbekendtgørelsen (jf. gengivelsen på side 268), som censorerne havde været meget grundigt nede i:

> "Ved bedømmelsen af en eksaminands besvarelse af den enkelte opgave lægges vægten hovedsageligt på, i hvilken grad vedkommende har demonstreret besiddelse af problemhåndterings-, symbolbehandlings- og ræssonementskompetence, og kun i mindre grad på, om løsningsstrategien er i overensstemmelse med det forventede." (Essen et al.; 2000, p. 58)

At det var grundlaget for bedømmelsen var alle enige om, men navngivningen af de udvalgte kompetencer sikrer på ingen måde enighed om hvad det vil sige at have demonstreret besiddelse af dem, jf. analysen af det kompetenceorienterede projektarbejde i afsnit 13.2.

Multidimensionalitet som bidrag til en forståelse

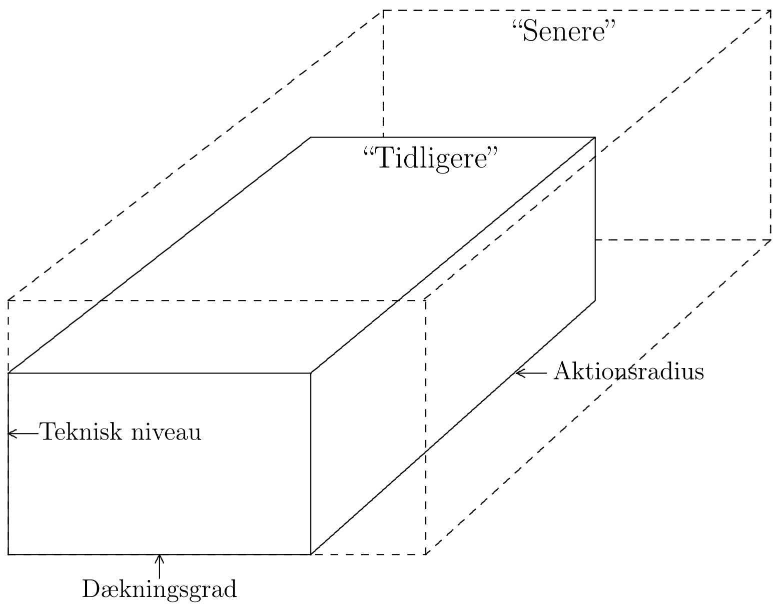
I forsøget på at forstå hvad uenigheden om bedømmelseskriterierne gik ud på har jeg benyttet en analytisk tilgang fra KOM-projektet (Niss & Jensen; 2002, kap. 9). Afsættet er forståelsen af begrebet *kompetence*, som jeg som nævnt bruger som betegnelse for *nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation.* Med det udgangspunkt er der mindst tre dimensioner i karakteristikken af en persons besiddelse af en kompetence (Ibid., p. 65):

Dækningsgrad: "En kompetences *dækningsgrad* hos en person bestemmes af i hvor høj grad de *aspekter*, som karakteriser kompetencen, er dækket hos den pågældende, dvs. hvor mange af disse aspekter, personefn kan aktivere i forskellige foreliggende situationer, og med hvor høj grad af autonomi aktiveringen kan ske." [...]

Aktionsradius: "En kompetences *aktionsradius* hos en person udgøres af det spektrum af *sammenhænge og situationer* personen kan aktivere kompetencen i." [...]

Teknisk niveau: "En kompetences *tekniske niveau* hos en person bestemmes af, hvor *begrebsligt og teknisk avancerede* sagsforhold og værktøjer personen kan aktivere den pågældende kompetence overfor." [...]

Indenfor denne tredimensionelle model er kompetencebesiddelse repræsenteret ved et volumen, jf. figur 13.5, og progression består i at gøre dette volumen større ved at udvikle kompetencebesiddelsen langs en eller flere af de tre dimensioner.



Figur 13.5 En visualisering af en tredimensionel model af progression i nogens kompetencebesiddelse (Niss & Jensen; 2002, p. 128).

Ved den skriftlige del af den summative evaluering af elevernes kompetencebesiddelse i Allerød-forsøget diskuterede Karsten og jeg ikke aktionsradius som progressionsdimension, og jeg har heller ikke set nogle indikationer på at det indgik i censorernes overvejelser. I tilbageblik hænger det nok sammen med at den dimension – "bredden" i kompetencebesiddelsen, om man vil – er vanskelig at udfordre i en skriftlig prøvesituation af nogle få timers varighed.

Derimod blev begge de sider af nogens kompetencebesiddelse som her betegnes dækningsgrad og teknisk niveau, diskuteret både mellem Karsten og eleverne, mellem Karsten og mig og på vores møder med fagkonsulenten. Eksempelvis diskuterede vi i alle disse tre fora bedømmelsen af matematisk problemløsningskompetence og de forskellige typer opgaveformuleringer i den forbindelse: Et af de fornemste mål i den forbindelse er at lære eleverne ikke at havne i den tidligere omtalte (side 208) "enten kan jeg eller også kan jeg slet ikke"-situation, men i stedet vha. forskellige heuristiske overvejelser og passende mål af metakognitive evner at kunne arbejde sig ind på livet af problemet.

Af hensyn til de elever der endnu ikke har udviklet dækningsgraden så meget at de til fulde magter dette centrale aspekt af matematisk problemløsningskompetence, er det derfor hensigtsmæssigt hvis hovedparten af de problemstillinger der anvendes til eksamen, er formuleret så passende åbent at det er muligt at løse problemet på flere kvalitativt forskellige niveauer. Det skal med andre ord være sådan, at det i bedømmelsen er muligt at tilskrive det værdi at have taget initiativer i retning af en løsning på problemet (Swan; 1993, pp. 204-207).

Hvad angår det tekniske niveau diskuterede vi i alle de tre ovennævnte fora mest inddragelsen af variable og dertil hørende algebra i forbindelse med problemløsning: En person der kan komme med en generel løsning på et problem ved at opstille algebraiske udtryk har højere teknisk niveau end en der kun kan håndtere et specialtilfælde med specifikke talværdier, ligesom en person der – når det er relevant – kan arbejde med funktionssammenhænge har højere teknisk niveau end en der kun kan arbejde med simple ligninger.

Både dækningsgraden og det tekniske niveau var altså vigtige at arbejde med i forbindelse med udviklingen af Allerød-elevernes matematiske problemløsningskompetence. Så langt var alle parter enige, selv om vi ikke havde præcise ord for det dengang. Uenigheden handlede efter min vurdering om *vægtningen* af disse to dimensioner i udviklingen og evalueringen af elevernes kompetencebesiddelse.

Den klasserumskultur som Karsten og jeg ønskede og langt hen ad vejen også lykkedes med at opbygge, kan – med den tredimensionelle model af kompetencebesiddelse som ramme – karakteriseres som en kraftig vægtning af dækningsgraden i elevernes faglige kompetenceudvikling i almindelighed og i udviklingen af deres matematiske problemløsningskompetence og matematiske modelleringskompetence i særdeleshed. Dækningsgraden – "dybden" i kompetencebesiddelsen, om man vil – skulle i vores og elevernes bevidsthed fremstå som en afgørende ting at udvikle, også selv om det givetvis ville "koste" på andre fronter og fx betyde mindre tid og rum til at udvikle det tekniske niveau. Når vi bedømte elevernes præstationer kan jeg med det multidimensionelle begrebsapparat til rådighed se at det implicit var dækningsgraden af de kompetencer der i en given sammenhæng var i fokus, der lagde niveauet, hvorefter indtrykket af det tekniske niveau og aktionsradius blev brugt til at "finjustere" den samlede bedømmelse.

For "systemet" repræsenteret ved fagkonsulenten og de to censorer var vægtningen som jeg vurderer det den omvendte. Ved evalueringen af elevernes faglige kompetencebesiddelse mener jeg – bl.a. baseret på et interview i december 2002 med fagkonsulenten om Allerød-eksamensforløbet – deres tilgang kan karakteriseres som en kraftig vægtning af det tekniske niveau på bekostning af dækningsgraden (Jensen; to appear). Ved bedømmelsen af besvarelserne af de skriftlige eksamensopgavesæt fra maj og august 2002 var det derfor afgørende om eleverne fik bragt de nyest tilkomne matematiske begreber og teknikker i spil. Hvis det var tilfældet, og en besvarelse derfor var sikret en positiv bedømmelse, kunne dækningsgraden bruges til at afgøre hvor i den bedre ende af karakterskalaen man endte. Tilsvarende kunne høj dækningsgrad gøre at man ikke endte helt i bund, hvis en besvarelse ikke i nævneværdig grad inddrog matematikfagligt stof på gymnasialt niveau, og man derfor var sikker på at ende i den dårligste ende af karakterskalaen.

Den forskellige vægtning ville ikke udgøre et fundamentalt problem hvis alle parter fastholdt en multidimensionel tilgang i tilbagemeldingen til eleverne (og andre interesserede), som der er givet eksempler på i KOM-rapporten (Niss & Jensen; 2002, p. 136ff). Så kan enhver jo forholde sig til bedømmelsen af de forskellige elementer i en persons besiddelse af en konkret kompetence, og eventuelt tillægge dem en vægtning man mener er fornuftig hvis man har brug for en samlet bedømmelse. Problemet opstår når tilbagemeldingen som ved den afsluttende skriftlige eksamen i Allerød-forsøget kun består af én karakter. Så vil forskellig vægtning af de elementer som indgår heri næsten uundgåeligt gøre evalueringen meget bedømmer-afhængig og resultere i et forskelligt karakterniveau alt afhængigt af hvem der "sidder i dommerskranken".

13.4.3 Et eksempel: Valg af evalueringsopgaver

Kernen i begge de to ovenfor analyserede problemfelter vedrørende den afsluttende skriftlige eksamen i Allerød-forsøget er den samme: Forskellige kriterier for hvad der i en given sammenhæng er udtryk for kvalitet lod sig ikke umiddelbart forene, og i den afvejning der derfor blev nødvendig, var Karstens og min prioritering modsatrettet fagkonsulentens. Vi prioriterede modsat ham validitet over reliabilitet og dækningsgrad over teknisk niveau.

Begge dele kan eksemplificeres ved at se på vores respektive valg af evalueringsopgaver.

"Udfoldning" af høj dækningsgrad

Sidste gang Karsten og jeg kunne formulere evalueringsopgaver helt som vi ville var til terminsprøven i marts 2002. Her lød opgave 1C således (jf. gengivelsen i appendiks E):

> "Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale."

Det er siden blevet mit yndlingseksempel på en "Allerød-opgave" med meget høj validitet, fordi den giver mulighed for og lægger op til at udvikle og udøve høj dækningsgrad i forhold til de kompetencer der var højest prioriterede i forsøgsundervisningen. Det kan jeg illustrere med den udfoldning af opgaven jeg lavede på side 5f:

> Overhaling på en landevej kræver frit udsyn et stykke frem ad vejen. Lad os kalde denne minimale udsynslængde U. Der er flere forskellige ting som har indflydelse på størrelsen af U. I første omgang vil vi holde os til at se på længden L af den bil man overhaler, den mindst forsvarlige afstand til bilen før man trækker ud, S_1, og før man trækker ind igen, S_2, ens egen hastighed V_e og hastigheden V_o af den bil man overhaler.
>
> a) Tegn en skitse af overhalings-situationen. Hvor lang tid vil du være om at overhale en stillestående bil, hvis $L = 3$ m, $S_1 = 50$ m, $S_2 = 10$ m og $V_e = 80$ km/t?
>
> U svarer til længden af det stykke du når at køre, fra du begynder at trække ud til du efter overhalingen er tilbage i din egen vejbane. Sammenhængen mellem U og de øvrige variable vi har i spil, er givet ved følgende formel:
>
> $$U = \frac{V_e}{V_e - V_o}\,(L + S_1 + S_2)$$
>
> b) Hvad bliver U hvis $L = 3$ m, $S_1 = 50$ m, $S_2 = 40$ m, $V_e = 80$ km/t og $V_o = 70$ km/t?
>
> Modellen kan gøres mere realistisk ved også at inddrage eventuel modkørende trafik. Herved vokser U, som nu svarer til afstanden til den nærmeste modkørende bil når overhalingen igangsættes, af to grunde: For det første nærmer den modkørende bil sig med en hastighed V_m i løbet af den tid man er om at foretage overhalingen. For det andet skal man kunne nå at trække ind igen efter overhalingen med en mindste forsvarlig afstand S_3

til den modkørende bil. Med disse nye variable i spil kommer formlen til at se således ud:

$$U = \frac{V_e + V_m}{V_e - V_o}(L + S_1 + S_2) + S_3$$

c) Vurdér betydningen af den modkørende bils hastighed, fx ved at fastholde værdierne givet i spørgsmål b), vælge en værdi for S_3 og beregne U for forskellige værdier af V_m.
d) Giv en vurdering af hvor stor betydning variationer i de øvrige variables værdi har for størrelsen af U.

I forbindelse med en færdselskampagne mod for høj hastighed på landevejene er man interesseret i at kunne beregne, hvor hurtigt det er forsvarligt for en bilist at køre, hvis man forestiller sig at man kender værdien af de øvrige variable i spil.

e) Omform den sidst givne version af formlen så V_e står isoleret, og benyt denne omformning til at vurdere betydningen af variationer i de øvrige variables værdi for størrelsen af V_e.

Hvis man er i stand til at gennemføre en sådan udfoldning og efterfølgende svare på de spørgsmål der hermed rejses, har man i min optik på eksemplarisk vis demonstreret høj dækningsgrad i forhold til både matematisk modellerings- og matematisk problembehandlingskompetence (og matematisk symbolbehandlingskompetence som jeg siden Allerød-forsøget har arbejdet meget med).[11]

Det tekniske niveau i denne besvarelse er imidlertid lavt, hvis man bruger de begreber og teknikker der introduceres i den gymnasiale matematikundervisning, som bedømmelsesgrundlag: Der trækkes "kun" på begreber som variabel, ligning og brøk og på teknikker som løsning af førstegradsligninger og kvalitativ analyse af brøker, hvilket alt sammen er noget der *rent pensummæssigt* introduceres på grundskoleniveau.

"Indfoldning" af højt teknisk niveau

Temaet "trafik" indgik også i det opgavesæt "systemet" med fagkonsulenten i spidsen udarbejdede til den skriftlige forsøgseksamen med hjælpemidler i maj 2002. Her lød opgave 2B således (jf. gengivelsen i appendiks E):

> "I kørelærerens teoribog tales om reaktionslængde og bremselængde. *Reaktionslængden* er det stykke en bil kører før føreren begynder at bremse. *Bremselængden* er det stykke en bil kører fra føreren begynder at bremse til bilen står stille.
>
> Af teoribogen fremgår at *reaktionslængden* er 3 meter for hver 10 km/t man kører. Af samme teoribog fremgår, at *bremselængden* ved 30 km/t er

[11] For nu at svare på det spørgsmål fagkonsulenten stillede midt i citatet på side 233.

> ca. 6 meter, og at den øges voldsomt, når hastigheden forøges: Ved 2 gange så stor hastighed bliver bremselængden 4 gange så stor. Ved 3 gange så stor hastighed bliver bremselængden 9 gange så stor.
>
> Der ønskes en matematisering af dette dvs. opstilling af matematiske udtryk for, hvorledes reaktionslængde og bremselængde afhænger af hastigheden v.
>
> Der ønskes dernæst en vurdering af, hvorledes den mindste afstand a mellem to kørende biler afhænger af farten v, når der tages hensyn til sikkerheden.
>
> Endelig ønskes opstillet en trafikmodel over sammenhængen mellem det maksimale antal biler $N(v)$, der passerer et bestemt punkt og bilernes gennemsnitsfart.
>
> Det må gerne i opstillingen af modellen antages, at bilerne kører med samme fart v, at de holder samme faste indbyrdes afstand a og at alle bilerne er lige lange."

En bare rimeligt fyldestgørende besvarelse af denne opgave vil demonstrere højere teknisk niveau end den eksemplariske besvarelse af Karstens og min opgave: Her vil man også oplagt kunne inddrage begreber og teknikker som potensfunktion og optimering ved hjælp af differentialregning der pensummæssigt traditionelt hører hjemme på gymnasialt niveau.

Til gengæld giver opgaven ikke mulighed for at demonstrere høj dækningsgrad i forhold til hverken matematisk modelleringskompetence eller matematisk problembehandlingskompetence fordi en væsentlig del af kompetenceudøvelsen allerede har fundet sted i forbindelse med formuleringen af opgaven; hele den indledende del (motivering og systematisering, jf. figur 6.2 på side 114) af modelleringsprocessen er gennemført, og problemløsningsmæssigt er der "slået hul på bylden" ved gennem delspørgsmål at anvise skridtene i den ønskede løsningsproces.

Hvis man med udgangspunkt i samme problemstilling skulle åbne op for at demonstrere større dækningsgrad kunne det fx ske ved at "indfolde" fagkonsulentens opgave til noget i stil med dette:

> Modellér sammenhængen mellem det maksimale antal biler $N(v)$ der passerer et bestemt punkt, og bilernes gennemsnitsfart, når der tages hensyn til sikkerheden.

I denne version vil opgaven imidlertid efter min vurdering være meget ringe anbragt i matematikundervisningen på gymnasialt niveau, medmindre man forestiller sig at supplere den med massiv lærerhjælp til at systematisere modelleringprocessen. For langt de fleste elever vil kendskabet til forholdene når biler bremser og fortroligheden med potensfunktioner og optimering ikke være tilstrækkelig til, at de autonomt vil kaste sig ud i en løsningsproces som bare ligner den fagkonsulenten anviser i sin udfoldede version af opgaven!

Det eksemplificerer behovet for at tage stilling til, i hvilken grad det er dækningsgraden eller det tekniske niveau man ønsker at udfordre ved udformningen af opgaver, da høje krav på den ene front til dels spænder ben for muligheden for høje krav på den anden front. Hvad det angår var der som nævnt ovenfor efter min vurdering tale om regulær uenighed mellem Karsten Wegener og mig på den ene side og “systemets” repræsentanter i form af eksterne censorer og fagkonsulent på den anden side.

Del V

Afrunding

14 Konklusioner, evaluering og konkrete forslag

14.1 Svar på de stillede forskningsspørgsmål

I afsnit 2.3 (side 22f) formulerede jeg en række spørgsmål som har virket strukturerende og retningsgivende for analyserne fremlagt i denne afhandling. Nedenfor gengiver jeg disse spørgsmål og formulerer i kondenseret form hvad jeg mener at kunne svare herpå.

Afhandlingens del II

a) Hvilke *potentialer* kan jeg på baggrund af henholdsvis matematikfaglige og kognitions-psykologiske analyser argumentere for der er, ved at arbejde med analyse og konstruktion af matematiske modeller i matematikholdige almendannende uddannelser?

b) Hvilken betydning kan jeg tillægge *begreberne* matematisk modellering, matematisk problemløsning, kompetence, matematisk modelleringskompetence, matematisk problembehandlingskompetence, teknologisk kompetence og demokratisk kompetence, så de i forhold til de fundne potentialer kan bruges konstruktivt i forbindelse med tænkning omkring samt tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering af matematikholdig undervisning på almendannende uddannelser?

Med analysen i del II mener jeg – som gengivet i kapitel 7 – at have retfærdiggjort følgende svar på disse spørgsmål:

Begrebet "matematisk modellering" bruger jeg som betegnelse for en proces hvor alle faserne i den matematiske modelleringsproces – som jeg betegner motivering, systematisering, matematisering, matematisk analyse, fortolkning og evaluering – gennemgås med henblik på at konstruere og analysere en matematisk model.

Begrebet "matematisk problemløsning" bruger jeg som betegnelse for den proces hvorigennem man forsøger at løse et matematisk problem. Ved et matematisk problem forstår jeg en situation der involverer en række metode-åbne spørgsmål der udfordrer en eller anden intellektuelt som ikke umiddelbart er i besiddelse af direkte metoder/procedurer/algoritmer der er tilstrækkelige til at besvare spørgsmålene, og hvor de metodemæssige overvejelser involverer visse matematiske begreber, metoder og resultater.

Begrebet "kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til at handle på en måde, der lever op til udfordringerne i en given situation.

Begrebet "matematisk modelleringskompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at gennemføre alle dele af en matematisk modelleringsproces og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "matematisk problembehandlingskompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at formulere og løse såvel rene som anvendelsesorienterede matematiske problemer og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "teknologisk kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at udvikle og udnytte teknologi og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebet "demokratisk kompetence" bruger jeg som betegnelse for nogens indsigtsfulde parathed til selv at være medlevende deltager i et demokrati og til at forholde sig kritisk undersøgende til andres ageren i den henseende.

Begrebsmæssig klarhed muliggør reflekteret opgavevalg: Jeg kan temmelig præcist karakterisere matematikopgaver fra to vinkler. Den ene drejer sig om hvilke dele af *den matematiske modelleringsproces* en given opgave udfordrer modtageren til selv at arbejde aktivt med og hvilke dele der eventuelt er gennemført af opgavestilleren. Den anden drejer sig om hvorvidt der er tale om *et problem* eller *en øvelse* relativt til en given målgruppe.

Uanset hvilke begrundelser for at gennemføre matematikundervisning man som enkeltperson eller som officielt organ har, kan en sådan opgavekarakteristik bidrage til at skabe bedre overensstemmelse mellem disse begrundelser og valg af opgavetyper.

Anvendelsesorienterede opgaver udgør et spektrum hvor modellering udgør det mest komplekse yderpunkt.

Modellering – en årsagsdiskussion: Graden og omfanget af anvendelsesorientering – og dermed også modellering – i matematikundervisningen er primært en diskussion der fører tilbage til årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Modellering og den økonomisk/tekniske årsag (jf. side 31): I halvtresserne, hvor den eksterne fagopfattelse kan karakteriseres som teknologisk pragmatisme, spillede modellering ikke nogen rolle i gymnasiets matematikundervisning, der udelukkende skulle lægge det matematiske fundament til videre studier.

I nutidens matematikundervisning henviser den økonomisk/tekniske årsag i stadig højere grad til matematiks anvendelser indenfor ikkenaturvidenskabelige fagområder parallelt med de traditionelle naturvidenskabelige anvendelser; matematikanvendelserne er "eksploderet" i omfang dækkende en stadigt bredere fagvifte. Matematisk modellering som element i matematikundervisning har et stort potentiale i forhold til at forberede eleverne på at kunne imødekomme de arbejds- og studiemæssige krav, en sådan bredspektret matematikanvendelse stiller.

Modellering og den individorienterede årsag (jf. side 31): Som jeg vurderer det er ønsket om – parallelt med en teknologisk kompetence – at udvikle elevernes demokratiske kompetence det væsentligste karakteristikon ved ændringen gennem de sidste ca. 35 år af årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Matematisk modellering i matematikundervisningen har et stort potentiale i forhold til udvikling af en sådan demokratisk kompetence. Potentialet står og falder med at de motiverende, systematiserende og kritisk vurderende delprocesser er integrerede elementer i den samlede arbejdsproces forbundet med matematisk modellering.

Modellering og strukturalisme: Som reelt virkende årsag bag "den ny matematik" har jeg peget på det behov 60'er-reformatorerne oplevede for indsocialisering af tilstrækkeligt mange unge mennesker i en moderne udgave af matematik *som videnskabsfag*. Det filosofiske udgangspunkt herfor kan helt entydigt siges at være *strukturalisme*. Med et sådant udgangspunkt har matematisk modellering – i den betydning jeg tillægger begrebet – ingen potentialer relateret til årsagerne til at der udbydes matematikundervisning.

Modellering og socialkonstruktivisme: I den socialkonstruktivistiske tilgang til matematik er der derimod store årsagsrelaterede potentialer i at arbejde med matematisk modellering. Modelleringsarbejde understreger flere angrebsvinkler og metoder og udviklingsprocessen er ofte karakteriseret ved dynamisk samspil mellem flere aktører, og viser dermed matematikken på en ikke-autoritær, ikke-isoleret og ikke-produktorienteret måde.

Problemløsning – en læringsmæssig diskussion: Vægtningen mellem problemer og øvelser i matematikundervisningen er primært en læringsmæssig diskussion der fører tilbage til, hvilken form for forståelse man som enkeltperson eller som officielt organ ønsker at fremme.

Problemløsning og relationel læring: Problemløsning i matematikundervisningen har et læringsmæssigt potentiale i forhold til at udvikle elevernes *relationelle* forståelse af de indgående matematiske begreber. Deri ligger at problemløsning vil kunne bidrage til en langsigtet forståelse med anvendelsesmuligheder indenfor mange forskellige domæner, men også at det er en tidskrævende måde at arbejde med stoffet på.

Et forståelsesmæssigt potentiale ved modellering: Forståelsesmæssigt er det væsentligste potentiale ved modellering at det – praktiseret som en proces, eleverne selv arbejder sig igennem – udvider de domæner som eleverne konstruktivt kan aktivere deres matematiske begreber indenfor. Anvendelsen af et givet matematisk begrebsapparat til at modellere en ekstra-matematisk problemstilling bidrager til, at de matematiske begreber assimileres i en række ekstra-matematiske semantiske strukturer der aktiveres i forbindelse med denne problemstilling.

Samspil mellem problemløsning og modellering: At matematisk problemløsning og matematisk modellering ofte vil være i spil samtidig, da mange modelleringsforløb vil afstedkomme problemer undervejs, gør det ikke mindre relevant at kunne skelne mellem de udfordringer de to typer aktiviteter afstedkommer, tværtimod.

Evnen til at skelne oplever jeg som en styrke ved tilrettelæggelsen af undervisningen, både fordi man derved kan stille skarpt på, hvilke kompetencer det *egentlig* er man ønsker at eleverne udvikler, og fordi man i forbindelse med modelleringsaktiviteter lettere kan analysere, hvori elevernes vanskeligheder ligger.

Afhandlingens del III

c) Hvilke *tilrettelæggelsesmæssige karakteristika* i forhold til måden matematisk modellering potentielt kan integreres i undervisningen på kan jeg med afsæt i teoretiske analyser argumentere for som værende centrale, hvis målet er i så vid udstrækning som muligt at udvikle elevernes matematiske modelleringskompetence?

I kapitel 8 formulerede jeg mit svar på dette spørgsmål i form af de fire nedennævnte såkaldte "ankerpositioner" i relation til undervisningens tilrettelæggelse, og med analysen i de efterfølgende kapitler i del III mener jeg at have begrundet og motiveret de tre førstnævnte:

Ankerposition 1: Matematisk modellering skal indgå som en tilbagevendende aktivitet i undervisningen og skal stræbe mod at foregå som elevstyret problemorienteret projektarbejde gennemført i grupper.

Ankerposition 2: Rammerne for undervisningen skal overvejende bestå i specificering af nogle kompetencer som eleverne skal arbejde mod at udvikle, og kun i begrænset omfang af traditionel pensumlistning.

Ankerposition 3: I de perioder hvor der ikke arbejdes projektorganiseret, skal undervisningen stræbe efter at etablere en didaktisk kontrakt karakteriseret ved at

i) arbejde med problemløsning konsekvent går *forud* for lærerstyret gennemgang,

ii) de forhold som der fra forskningsmæssig side argumenteres for karakteriserer evnen til matematisk problemløsning eksplicit gøres til genstand for undervisning,

iii) elevernes metakognitive viden forsøges udviklet ved at de selv deltager i udvælgelsen af opgavetyper med udgangspunkt i en erkendelse af problemløsning og øvelsesregnings forskellige læringsmæssige status,

iv) en betydelig del af problemløsningen udfordrer evnen til at matematisere en ekstra-matematisk problemstilling.

Ankerposition 4: De projektrapporter som er det synlige resultat af de gennemførte modelleringsforløb, skal indgå i evalueringen af elevernes udbytte af undervisningen på en så substantiel måde, at det set i bedømmelsesøjemed er fordelagtigt for eleverne at tillægge arbejdet hermed betydelig vægt.

Tilsvarende skal besiddelse af en generel problemløsningskompetence indgå i evalueringen på en måde der gør det fordelagtigt at arbejde systematisk med at udvikle en sådan kompetence.

Afhandlingens del IV

d) Hvad er karakteren af de *hindringer* som i et konkret tilfælde stiller sig i vejen for utopien om en fuldstændig realisering af "den gode praksis" i overensstemmelse med de centrale tilrettelæggelsesmæssige karakteristika?

Med analysen i del IV mener jeg at have begrundet og motiveret følgende svar på dette spørgsmål:

Forvaltningen af tiden: Formulering af faglige kompetencebeskrivelser som omdrejningspunkt for undervisning er en måde at eksplicitere nogle faglige mål som i kraft af kompetencebegrebets indhold må anses for ret ambitiøse. Det er derfor helt naturligt og forventeligt at kompetenceorienteret undervisning er en tidskrævende proces.

I Allerød-forsøget medførte bestræbelserne på at tage denne erkendelse alvorligt at den uundgåelige kamp om tiden mellem forskellige former for undervisningsaktiviteter blev skærpet i en sådan grad, at nogle aktivitetsformer ikke fik den tid der skulle til for på tilfredsstillende vis at realisere målene hermed.

Muliggørelsen af elevstyring: Det er nødvendigt at arbejde med en høj grad af elevstyring i dele af en undervisning som har udvikling af matematisk modelleringskompetence som centralt mål, og det gør håndteringen af dilemmaet ved at undervise i orienteret autonomi til en af de centrale udfordringer.

I Allerød-forsøget medførte denne erkendelse at det blev et centralt indsatsområde at forsøge at gøre eleverne fortrolige med den faglige ambition bag beskrivelsen af hver af de faglige kompetencer, fordi det viste sig at en betydelig del af succesen med at lægge stor vægt på elevstyret projektarbejde stod og faldt med om eleverne opnåede en sådan fortrolighed. Arbejdet med denne udfordring viste sig at være meget krævende for både elever og lærer, og for nogle af eleverne faldt succesen mere end den stod.

Lærerens kompetencer og ressourcer: Kompetenceorienteret undervisning i almindelighed og fokus på udvikling af matematisk modelleringskompetence i særdeleshed fordrer meget af læreren både pædagogisk, fagdidaktisk og fagligt.

I Allerød-forsøget viste det sig ved at lærerens matematikfaglige kompetence var en begrænsende faktor for hans mulighed for at håndtere nogle af forsøgsundervisningens udfordringer og ved at en nedgang i den samlede mængde ressourcer undervejs i forløbet slog kraftigt igennem på både elevernes og lærerens egen oplevelse af forsøgsundervisningen.

Den afsluttende skriftlige eksamen: Som undervisningens omdrejningspunkt inviterer faglige kompetencebeskrivelser til et flerdimensionelt syn på progression og evaluering.

Erfaringerne fra Allerød-forsøget indikerer at et sådant skift nødvendiggør en ny evalueringskultur omkring det almene gymnasiums matematikundervisning som gør op med det tekniske niveaus dominans over aktionsradius og dækningsgrad.

14.2 Succesfulde elementer i projektet

Som nævnt i afsnit 11.2 (side 178f) kan der høstes andre resultater fra Allerød-forsøget end den ovennævnte påpegning af forskellige former for hindringer for realiseringen af idealet om "den gode praksis". Der er også mulighed for at pege på forhold som på forskellige niveauer var en succes i forhold til dette ideal: Dels et praksisnært niveau som refererer til elevernes konkrete udbytte af forsøgsundervisningen, dels et mere overordnet strukturelt niveau som refererer til forsøgsundervisningens tilrettelæggelse og gennemførelse.

14.2.1 Eksistensbeviser

Hvad er værd at pege på som en succes hvad angår elevernes udbytte af undervisningen? Med afsæt i et kvalitativt studie af ét undervisningsforløb giver det rent argumentationslogisk kun mening at stile efter at komme med en række eksistensbeviser for nogle episoder i matematikundervisningen som i et givet perspektiv er efterstræbelsesværdige eller på anden måde interessante og derfor kan virke inspirerende i kraft af eksemplets magt. Det bevismæssige går på at svaret er "ja" til et spørgsmål af typen "er det overhovedet *muligt* at gennemføre matematikundervisning, som i situationen lever op til målet om . . . ?”[1]

Her vil jeg med erfaringerne fra Allerød-forsøget i ryggen fremhæve følgende forhold:

elevstyret arbejdskultur: Ja, det er muligt at etablere en elevstyret arbejdskultur i det almene gymnasiums matematikundervisning, jf. karakteristikken af forsøgsundervisningen i kapitel 12.

Modelleringskultur: Ja, det er muligt at etablere en modelleringskultur i det almene gymnasiums matematikundervisning, jf. analysen heraf i kapitel 9.

Problemløsningskultur: Ja, det er muligt at etablere en problemløsningskultur i det almene gymnasiums matematikundervisning, jf. analysen heraf i kapitel 10.

Evalueringskultur: Ja, det er muligt at etablere en evalueringskultur hvor både læreren og majoriteten af eleverne i en klasse i det almene gymnasium bakker op om og stiller sig solidarisk med at der både formativt og summativt tages afsæt i opgaver som evaluerer matematisk problemløsningskompetence og matematisk modelleringskompetence i korterevarende forløb, jf. gengivelsen heraf i appendiks E.

Metakognitivt løft: Ja, det er muligt at give majoriteten af eleverne i en klasse i det almene gymnasium et metakognitivt løft gennem en eksplicit skelnen mellem forskellige aktivitetsformer (øvelsesregning, problemløsning og projektforløb) som de hver for sig og i samspil oplever som relevante, jf. de mange refleksioner herover i spørgeskemabesvarelserne (appendiks H).

Alle disse forhold er efter min vurdering instanser af elevernes tilskrivning af mening og relevans til projektet som helhed. Denne vurdering støttes af tonen i spørgeskema-besvarelserne på side 365f, hvor eleverne kommenterer sagen direkte.

14.2.2 Forhold som kunne have været en hindring

Allerød-forsøget var også en succes hvad angår alt det der kunne have været en forhindring men ikke blev det, herunder:

Det nødvendige møde: Det lykkedes at etablere en kontakt og et samarbejde mellem mig som forsker og Erik von Essen og ikke mindst Karsten Wegener som gymnasielærere, jf. afsnit 12.1.1 (side 184f).

[1] Jf. kategoriseringen i begrundelses-, implementations- og *mulighedsproblemer* i Niss (1994, p. 373f) og Niss (1997, p. 25f).

Godkendelse af forsøgsansøgningen: Undervisningsministeriet med fagkonsulenterne i spidsen godkendte næsten betingelsesløst forsøgsansøgningen, jf. omtalen på side 190.

Tilslutningen fra eleverne: Der meldte sig tilstrækkeligt mange elever til at oprette en forsøgsklasse på Allerød Gymnasium, jf. omtalen på side 198.

Udover disse konkrete forhold som alle oplagt var nødvendige at få på plads for at få forsøgsundervisningen op at køre, vil jeg også fremhæve måden forsker-praktiker-samarbejdet er forløbet på (jf. afsnit 12.3.2 på side 199ff) som en potentiel hindring som ikke blev til noget. Det skyldes for en stor dels vedkommende at det lykkedes at etablere det der i analysen i afsnit 11.3.2 (side 180f) med et ikke særlig heldigt ordvalg blev betegnet som et "klinisk partnerskab". Det afgørende ved denne form for samarbejde var i den konkrete situation det der er essensen i citatet på side 181, nemlig at Karsten var (en del af) objektet for undersøgelsen, men også selv var medundersøger på projektet og tog del i diskussionerne heraf, både internt og eksternt i forhold til andre lærere og forskere.

Allerede mens forsøgsundervisningen stod på tog vi således hul på det som (matematik)didaktisk forskning der virker reelt udviklende handler om, nemlig at virke inspirerende og mulighedsskabende på lærere og andre med ansvar for tilrettelæggelse af undervisning, jf. Wagner (1997, p. 17). Det skete dels ved at Karsten gennem sin didaktisk set undersøgende adfærd løbende var i dialog med sig selv og mig om sin ageren som matematiklærer i forsøgsundervisningen, dels ved at jeg løbende fik implicitte og eksplicitte tilbagemeldinger på hvilke former for bidrag til forsøgsundervisningen der virkede inspirerende eller på anden måde givende, og hvilke steder skoen trykkede uden at jeg var opmærksom på det.

14.3 Konkrete forskningsrettede forslag

Fra en lidt større flyvehøjde mener jeg at projektet her har demonstreret behov for at der sættes ind med (yderligere) forskning på følgende områder:

- Etablering af flere blandede forsknings- og udviklingsprojekter der stiller spørgsmålet *"hvorfor ikke?"*, jf. titlen på afhandlingen her.
- Etablering af flere blandede forsknings- og udviklingsprojekter hvor der samarbejdes om at gennemføre *tidsmæssigt autentiske* – hvilket altid vil sige langsigtede – undervisningsforløb som en måde at forbinde forskning og praksis.
- Etablering af flere blandede forsknings- og udviklingsprojekter hvor karakteren af *samarbejdet mellem forsker og praktiker* er så gensidigt

forpligtende at det bevæger sig ud over en datagenererings-aftale, jf. afsnit 11.3.2 (side 180ff).

- Etablering af flere blandede forsknings- og udviklingsprojekter hvor *faglige kompetencebeskrivelser* gøres til undervisningens omdrejningspunkt.

  I den forbindelse har jeg – i forlængelse af anbefalingen i Niss & Jensen (2002, kap. 8) – selv fulgt arbejdet med Allerød-forsøget op med forsknings- og udviklingsarbejde med fokus på betydningen af at fastholde kompetencer og stofområder som to adskilte indholdsdimensioner gennem matrix-strukturing af indholdsbeskrivelsen i læreplaner.
- Etablering af blandede forsknings- og udviklingsprojekter hvor *nye evalueringsformer* med høj validitet i forhold til faglig kompetenceudvikling gøres til et centralt tema.

  I den forbindelse er jeg selv nysgerrig efter at eksperimentere med og forske i udviklingen af hvad man kunne kalde kultur-baserede evalueringsformer (jf. omtalen på side 234f), men jeg har endnu ikke fået gjort noget systematisk ved sagen.
- Etablering af blandede forsknings- og udviklingsprojekter hvor *forholdet mellem lærerens pædagogiske, metodiske, fagdidaktiske og faglige kompetence* gøres til et centralt tema.

  I den forbindelse er jeg selv nysgerrig efter at eksperimentere med og forske i på hvilke måder det at gøre faglige kompetencebeskrivelser til undervisningens omdrejningspunkt udfordrer og udvikler hver af disse former for kompetence og forholdet mellem dem.
- Analyser af vanskeligheder ved udvikling af matematisk modelleringskompetence hvor *de sociokulturelle og de klassisk kognitionspsykologiske perspektiver på læring forsøges samtænkt*, jf. den generelle afgrænsning herfra i dette projekt i fodnoten på side 35, omtalen af kognitiv mesterlære på side 221ff og analysen af forskellen på problemløsnings- og elevstyringsfrustration i Blomhøj & Jensen (2003).
- Analyser af potentialer og vanskeligheder ved matematisk modellering med eksplicit udgangspunkt i *affektive forhold*. Sådanne studier er gennemført i forhold til matematisk problemløsning, men projektet her har rummet mange eksempler på at der er væsentlige udfordringer af følelsesmæssig karakter ved matematisk modellering som ikke indfanges af analyserne med udgangspunkt i problemløsning.

  Denne erkendelse er et eksempel på at den praksisrettede fortolkning af apriori-analysen virker tilbage herpå, hvilket understreger det frugtbare ved at arbejde med metoder indenfor matematikkens didaktik, hvor forsknings- og udviklingsarbejde er indtænkt så de kan virke gensidigt inspirerende uden at skulle forløbe som to adskilte processer.

14.4 Konkrete praksisrettede forslag

Selv om afhandlingen her primært er en rapportering over et forskningsprojekt vil det være synd ikke også at "trække lidt renter" på det forhold at der har været tale om et kombineret forsknings- og udviklingsprojekt. Her har det at bruge faglige kompetencebeskrivelser som omdrejningspunkt for undervisningens tilrettelæggelse, gennemførelse og evaluering vist sig at være trækket ved Allerød-forsøget med størst udviklingspotentiale. I en matematikundervisningskontekst har det vist sig at være en meget frugtbar ide som det er værd at udbrede, ikke mindst hvis "systemet" og lærerne er blevet gearet hertil.

I den forbindelse inviterer identifikationen af de fire udpegede former for hindringer i Allerød-forsøget i kapitel 13 til forskellige former for udvikling af matematikundervisningens praksis:

Vedrørende tidspresset: I en kompetenceorienteret undervisning er det afgørende at undgå pensumpres for at kunne imødekomme begge de to former for bekymring omtalt i afsnit 13.1 (side 213).

Med sådanne rammer i orden virker det hensigtsmæssigt at arbejde med "meningsforhandlet" og transparent, men herefter stramt gennemført styring af undervisningen på makroniveau som forudsætning for reel elevstyring på lavere tilrettelæggelsesniveauer.

Vedrørende uddannelsen af matematiklærere: Kompetenceorienteret undervisning fordrer som nævnt i afsnit 13.3 meget af læreren. Projektet her har haft særligt fokus på hvor meget det kræver af læreren at støtte udviklingen af elevernes matematiske problemløsningskompetence og – ikke mindst – matematiske modelleringskompetence, men der er ingen grund til at tro at noget lignende ikke ville komme frem ved analyser med fokus på nogle af de andre matematikfaglige kompetencer.

Et sådant pres på læreren har selvfølgelig meget at sige uddannelsen af matematiklærere, men her vil jeg nøjes med en banal konstatering: Praktiseringen af kompetenceorienteret undervisning har som forudsætning at de forskellige former for læreruddannelse udvikler de studerendes faglige kompetencer i en sådan grad at de med pondus og tyngde kan gå ud og sætte sig i spidsen for en lignende kompetenceudvikling sammen med deres elever.

Vedrørende den summative evaluering: Allerød-forsøget bekræfter det behov for udvikling af nye evalueringsformer til brug i matematikundervisningen som der peges på fra mange sider (jf. bl.a. Niss & Jensen; 2002, kap. 9).

Konkret har det vist sig lovende at benytte en eksamensform baseret på mundtligt forsvar af projektrapporter udarbejdet med et eksplicit fagligt kompetencesigte, mens brugen af centralt stillede og bedømte skriftlige problemløsningsopgaver ikke nåede at finde en form der giver grundlag for at komme med konkrete forslag.

14.5 Giver generalisering af resultaterne mening?

Generalisering er at kunne hæve sig op over tid og sted. For forskningsbaserede undersøgelser betyder det at resultaterne kan udstrækkes til også at gælde for andre end dem der er eller har været del af den konkrete undersøgelse (Jørgensen; 1995, p. 315).

Gælder det forsøget her? Det afhænger for mig at se af hvad man mener med "gælde for", hvilket igen afhænger af om man betragter projektet i et udviklings- eller forskningsperspektiv.

14.5.1 Ikke en "sådan gør du-pakkeløsning"

Som nævnt i kapitel 1 hverken tror jeg på eller er ideologisk set tilhænger af en topstyret "nu skal jeg vise jer hvordan"-model for udvikling af en given undervisningspraksis. Det har derfor ikke været målet med dette projekt at byde ind med en samlet "sådan gør du hvis du vil udvikle modelleringskompetence"-pakkeløsning.

En sådan tilgang tager ikke i tilstrækkelig grad udgangspunkt i at læreren er den helt afgørende person i forhold til om – og i givet fald på hvilke måder – en ønsket udvikling omsættes i praksis. Hvis ikke en tilstrækkelig stor del af en lærergruppe før eller siden kommer til at føle sig som medejere af et udviklingsprojekt hvis mål er at ændre deres undervisning, så bliver der ikke tale om en substansiel og varig ændring, om nogen overhovedet:

> "A related [refererer til tidligere i artiklen] lesson from detailed studies of the implementation process is that change ultimately is a problem of the smallest unit. At each point in the policy process, a policy is transformed as individuals interpret and respond to it. What actually is delivered or

> provided under the aegis of a policy depends finally on the individual at the end of the line." (McLaughlin; 1987, p. 174)

I tillæg hertil er og bør det være en central del af enhver lærers professionelle udfordring konstant at være i dialog med sig selv om, hvordan det der konkret foregår i undervisningen bedst muligt bringes i harmoni med de ofte udefra givne mål hermed. Denne "arbejdsdeling" mellem den enkelte lærer og det omgivende system er helt nødvendig for at fastholde undervisning som en kreativ og levende aktivitet, ikke mindst i lærerens bevidshed, hvilket en meget metodespecifik model for udvikling ikke signalerer respekt for.

14.5.2 Analytisk generalisering og troværdighed

Forskningsmetodisk består det centrale forhold i at analyser der udelukkende foregår på makro-niveau ikke forpligter sig på lokale forhold. Det gør konklusionerne mindre betingede af lokale forhold, hvilket analytisk kan virke fordelagtigt, men samtidig negligerer de underliggende niveauer i "implementations-kæden", som er de afgørende i forhold til at medvirke til ændringer af praksis.

Omvendt er det nødvendigt at se analyser og erfaringsopsamlinger på mikro-niveau fra singulære, miljø- og tid-og-sted-betingede forsøg som betingede udsagn, hvis relevans for andre end de involverede står og falder med at forbindelsen til analyser på makroniveau er så integreret en del af analysen at alle selv kan vurdere betydningen af de lokale forhold, og hvad det har af konsekvenser for den enkelte læsers mulighed for at bruge de fremlagte resultater til at udvikle egen forsknings- eller undervisningspraksis. Jo mere forankrede i konteksten nogle opsamlede erfaringer er, jo mere vil relevansen af generaliseringer på denne baggrund forfalde over tid:

> "Today's program consequences often are eroded by tomorrow's realities – staff moving on to new positions, different programe clientele, changed resource availibility, competing demands for time and attention. Summative statements are inherently conditional and time-bound. Thus it is crucial to understand the contextual factors associated with various program activities and outcomes. 'Why' and 'how' are as critical as 'what' and 'how much' to program analysis.
>
> In addition, this local variability, the plague of macrolevel planners, offers important opportunities to learn. Variability is not only inevitable in social policy settings, it is desirable. Local responses generate a vast natural experiment – combinations and permutations of practice that highlight niches for intervention and promising solutions – and should be exploited by analysts." (McLaughlin; 1987, p. 176)

Struktureringen af forskningsprojektet bag denne afhandling er et forsøg på at tage McLaughlins pointering alvorligt og dermed skabe grundlag for det Per Schultz Jørgensen (1995) betegner *analytisk generalisering.* Validiteten af den samlede analyse har jeg således bevidst forsøgt at styrke ved at integrere analyser på forskellige niveauer: Med afsæt i motivering på mikro-niveau i afhandlingens første del over i analyser på makro-niveau af grundspørgsmålene “hvorfor?”, “hvad?” og “hvordan?” i afhandlingens del II og III for derefter at vende tilbage til analyser af Allerød-forsøgets mikro-niveau med fokus på spørgsmålet “hvorfor ikke?” i afhandlingens del IV.

I forhold til at etablere *troværdighed* omkring analysen af Allerød-forsøget og konklusionerne baseret herpå er min tilstedeværelse undervejs central. Som nævnt i afsnittet om dataindsamlingen (side 204f) observerede jeg undervisningen i ca. halvdelen af de 250 matematiklektioner forsøgs-undervisningen bestod af. En så massiv tilstedeværelse harmonerer med begge sider af projektets dobbeltrettethed, jf. afsnit 11.3 (side 179ff): I et udviklingsperspektiv styrkede det den ønskede form for forsker-praktiker-samarbejde. I et forskningsperspektiv er massiv tilstedeværelse et centralt element i at sikre undersøgelsen tilstrækkelig intern validitet når man som jeg har valgt at gå kvalitativt til værks (Eisenhart & Howe (1992, pp. 644ff) og Jørgensen (1995, p. 316f)).

På spørgsmålet “giver generalisering af resultaterne mening?” vil jeg derfor svare: Ja, fordi analyserne bag disse resultater er båret af en intern validitet som kommer af at der er klarhed over forholdet mellem analyserne på makro- og mikro-niveau som grundlag for at man kan følge og kritisk forholde sig til de fremlagte ræsonnementer, og ja, hvis det er lykkedes mig at fremstå som en troværdig opdagelsesrejsende der er “vendt hjem” fra en rejse til mikro-verdenen i et klasserum på Allerød Gymnasium anno 2000-2002.

Del VI

Appendices

A Forsøgsbekendtgørelse om gymnasiets 2-årige forløb til B-niveau i matematik

Det følgende er en uredigeret gengivelse af den bekendtgørelse som var det formelle grundlag for den forsøgsundervisning i matematik som en klasse på Allerød Gymnasium gennemførte fra sommeren 2000 til sommeren 2002 – det såkaldte Allerød-forsøg (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik).

Sammen med en redigeret udgave af en motiverende tekst som blev indsendt som en del af forsøgsansøgningen til Undervisningsministeriet, har bekendtgørelsen været optrykt i LMFK-bladet[1] i forbindelse med forsøgets opstart (Jensen; 2000a; Essen et al.; 2000).

A.1 Identitet og formål

Betragtet som sprog er matematik en formalisme, der udvikler sig i kraft af menneskets enestående evne til abstrakt begrebsdannelse og ideudvikling, og hvis indre sammenhæng alene vedligeholdes gennem logiske ræsonnementer og bevisførelse. Disse karakteristika giver matematik en status som den mest abstrakte og tankebårne af alle videnskaber, og gør at matematisk aktivitet ofte er kendetegnet ved en søgen efter grundlæggende strukturer og fundamentale sammenhænge, en stræben efter klarhed og præcision i argumentationen, og en tro på værdien af uafhængig og autonom tænkning.

Matematik er også et fag, som har mange anvendelsesmuligheder indenfor andre fag- og praksisområder, hvilket i stigende grad bliver udnyttet på forskellige bevidsthedsniveauer. I denne henseende er matematik at betragte som et "polarisationsfilter", som det lys, virkeligheden tilbagekaster, kan betragtes igennem. Ved at bruge et sådant filter opnår man, at dele af det samlede lysindtryk i kraft af ovennævnte faglige karakteristika træder skarpere frem end ellers, og måske fremviser mønstre, som ikke ellers ville opleves. Samtidig vil andre dele af lysindtrykket fremtræde sløret, og bestemte former for lys vil slet ikke slippe igennem filteret. Det hører derfor med til identiteten af matematik som anvendt faglighed både at udvikle polarisationsfiltre med velafgrænsede karakteristika og kritisk at vurdere brugen af et sådant filter i en given konkret sammenhæng.

[1] Medlemsblad for lærere i det almene gymnasium i matematik, fysik, kemi og naturfag.

Formålet med matematikundervisningen er, at eleverne erhverver indsigt i begge disse karakteristiske træk ved matematik som fag, samt får forståelse for den dualitet, der som en konsekvens heraf kendetegner anvendelse af matematiske betragtningsmåder.

A.2 Undervisningsmål

A.2.1 Overordnede mål

De overordnede mål for undervisningen er,

a) at eleverne erhverver indsigt i, hvad der aktuelt karakteriserer matematik som faglighed såvel internt som eksternt, samt hvordan disse forhold historisk set har ændret sig, og
b) at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, og
c) at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fag- og praksisområder, og
d) at beskæftigelsen med matematik i forlængelse af ovenstående udvikler elevernes kreativitet, nysgerrighed og kritiske sans i forhold til matematikbaseret viden og forståelse.

A.2.2 Delmål

Arbejdet med at opfylde de overordnede mål skal være styret af, at eleverne i så rigt omfang som muligt udvikler en række generelle matematikkompetencer, samt bliver fortrolige med centrale begreber og metoder indenfor en række nærmere afgrænsede matematiske kerneområder.

Den første kategori af kompetencer er, hvad man kan betegne som *indsigtskompetencer*:

Anvendelseskritisk kompetence: At have erhvervet indsigt i og forståelse af opbygningen af matematiske modeller som repræsentationer af virkeligheden og indtryk af matematiske modellers anvendelsesmuligheder og begrænsninger.

Kultur-historisk kompetence: At have erhvervet indsigt i og forståelse af matematikkens historiske udvikling, både hvad angår den interne udvikling af matematik som en selvstændig kultur, og hvad angår den eksterne udvikling af matematiks rolle i en bredere kulturel og samfundsmæssig sammenhæng.

Strukturel kompetence: At have erhvervet indsigt i og forståelse af matematiks særlige karakter som disciplin, både hvad angår den strukturelle opbygning, de karakteristiske problemstillinger, tankegange, metoder og resultater og fagets videnskabsteoretiske status.

Den anden kompetence-kategori kan man betegne *handlekompetencer*:

Modelleringskompetence: At være i stand til på basis af indsigt at kunne gennemføre alle dele af en modelleringsproces.

Problemhåndteringskompetence: At være i stand til på basis af indsigt at kunne formulere og løse såvel rene som anvendelsesorienterede matematiske problemer.

Symbolbehandlingskompetence: At være i stand til at forstå symbol- og formelsprog, herunder oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt og naturligt sprog, samt på basis af indsigt at kunne behandle symbolholdige udsagn og udtryk.

Ræsonnementskompetence: At være i stand til på basis af indsigt at kunne følge og tage stilling til samt selv gennemføre et matematisk ræsonnement, herunder en matematisk bevisførelse, samt at kunne skelne mellem forskellige slags matematiske udsagn, herunder definitioner, sætninger og eksempler.

Kommunikationskompetence: At være i stand til på basis af indsigt at kunne udtrykke sig skriftligt og mundtligt om matematikholdige anliggender, samt at kunne forstå andres matematikholdige udsagn i såvel skriftlig som mundtlig form.

IT-kompetence: At være i stand til på basis af indsigt at kunne betjene sig af computerbaseret assistance for matematisk virksomhed, samt at have indsigt i sådanne virkemidlers anvendelsesmuligheder og begrænsninger.

A.3 Undervisningen

A.3.1 Indhold

Kerneområderne, og de begreber og metoder der skal arbejdes med i den forbindelse, er som følger:

Tal: Undervisningen skal uddybe elevernes forståelse af talbegrebet og styrke deres regnefærdighed. Endvidere skal eleverne blive fortrolige med regningsarternes hierarki samt opøve sikkerhed i at regne med brøker og omforme symboludtryk.

Emner: Hele, rationale og reelle tal samt regneregler for disse. Regning med potenser og rødder. Procentregning.

Geometri: Undervisningen skal uddybe elevernes kendskab til grundlæggende geometriske begreber, og eleverne skal erhverve fortrolighed med geometri og trigonometri som beregningsmæssige værktøjer.

Emner: Trekant, retvinklet trekant og ensvinklede trekanter. Analytisk beskrivelse af simple punktmængder i planen. Afstande i planen. Sinus, cosinus og tangens. Beregning af sider og vinkler i trekanter.

Funktioner: Undervisningen skal udbygge elevernes kendskab til elementære funktioner og deres egenskaber og gøre dem fortrolige med funktionsbegrebet som et middel til at beskrive sammenhænge mellem variable størrelser.

Emner: Lineære funktioner. Polynomier. Trigonometriske funktioner. Eksponential- og logaritmefunktioner samt potensfunktioner. Løsning af simple ligninger og uligheder, hvori de nævnte funktioner indgår.

Differentialregning: Eleverne skal erhverve indsigt i differentialregningens begreber og deres tolkning samt opnå færdighed i at anvende differentialregningens metoder og modeller.

Emner: Differentialkvotient. Tangent til graf, approksimerende førstegradspolynomium. Regneregler for differentiation. Ekstremumsbestemmelse, monotoniforhold. Sammenhæng mellem afledet funktion og forløb af graf.

Statistik og sandsynlighedsregning: Eleverne skal opnå forståelse af begreberne stokastisk eksperiment og sandsynlighed og erhverve fortrolighed med de sandsynlighedsteoretiske modeller binomialfordeling og normalfordeling samt praktiske anvendelser af disse.

Emner: Stokastisk eksperiment. A priori og frekventielle sandsynligheder. Sandsynlighedsfelt, sandsynlighed for hændelser. Stokastisk variabel. Binomialfordeling og normalfordeling.

A.3.2 Tilrettelæggelse

Undervisningen skal tilrettelægges, så eleverne opnår forståelse af kerneområderne som karakteriseret ovenfor, samt i så høj grad som muligt udvikler de nævnte generelle matematikkompetencer.

På B-niveau skal tilrettelæggelsen generelt være præget af en opprioritering af de anvendelsesorienterede dimensioner til fordel for de internt matematiske dimensioner.

Problemorienteret projektarbejde indgår som en central del af undervisningen. Projektarbejdet udføres i grupper på grundlag af problemstillinger, som eleverne formulerer i samråd med læreren. Eleverne udarbejder rapporter over projektarbejdet. Det styrende for projektarbejdet skal være i så høj grad som muligt at støtte udviklingen af de kompetencer, som tilgodeses af denne måde at organisere arbejdet på. Opprioriteringen af de anvendelsesorienterede dimensioner afspejler sig i vægtningen af de forskellige kompetencer ifm. projektarbejdet som følger:

- Mindst to projektarbejder skal fokusere på udviklingen af anvendelseskritisk kompetence.
- Mindst to projektarbejder skal fokusere på udviklingen af modelleringskompetence.
- Mindst et projektarbejde skal fokusere på udviklingen af kulturhistorisk kompetence.
- Mindst et projektarbejde skal fokusere på udviklingen af strukturel kompetence.

Herudover vil projektarbejdet som et fælles træk naturligt kunne bidrage til at udvikle elevernes kommunikationskompetence og IT-kompetence, både ifm. analysen af de forskellige problemstillinger og ifm. udarbejdelsen af rapporterne.

Skriftligt arbejde indgår som led i undervisningen. Eleverne skal jævnt fordelt over 2 år aflevere besvarelser af 26 opgavesæt og 8-10 projektrapporter. Hvert af opgavesættene skal i arbejdsomfang svare til 50-100 procent af et eksamenssæt. Projektrapporterne skal i arbejdsomfang tilsammen svare til 25 opgavesæt. Opgavebesvarelserne og projektrapporterne rettes og kommenteres af læreren.

Informationsteknologi skal inddrages i undervisningen fx. ved brug af værktøjsprogrammer eller programmer til belysning og indlæring af faglige begreber og metoder. Endvidere skal undervisningen omfatte eksempler på, hvordan visse matematiske fremgangsmåder kan algoritmiseres.

Fælles læsepensum er 140-220 intensivt læste sider afhængigt af det valgte undervisningsmateriale. Hertil kommer den litteratur, der inddrages ifm. projektarbejderne, samt evt. supplerende materiale som læses ekstensivt ifm. den mere kursus-prægede del af undervisningen.

A.4 Eksamen

Der afholdes en mundtlig og en skriftlig prøve.

A.4.1 Mundtlig prøve

Forberedelses- og eksiminationstid: Der gives en forberedelsestid på ca. 25 min. (inkl. instruktion og materialeudlevering). Der eksamineres (inkl. censur) 2,5 eksaminander i timen.

Eksamensopgivelserne omfatter 6 af de udfærdigede projektrapporter samt ca. halvdelen af kernestoffet. Det tilstræbes, at de udvalgte dele af kernestoffet på en naturlig måde kan inddrages ifm. diskussioner med udgangspunkt i en eller flere af de opgivne projektrapporter.

Eksamensspørgsmål: Der eksamineres i et af de gennemførte projektarbejder med udgangspunkt i den tilhørende projektrapport. Der gives hver eksaminand et spørgsmål. Spørgsmålene udformes således, at de giver eksaminanden lejlighed til at demonstrere, i hvilken grad vedkommende har udviklet de indsigts- og handlekompetencer, som arbejdet med den udtrukne projektrapport lægger op til, samt hvordan relevante dele af kernestoffet er eller kunne have været inddraget.

A.4.2 Første del af den skriftlige prøve

Praktiske forhold: Til den første del af den skriftlige prøve gives der 1 time. Prøven foregår uden hjælpemidler.

Opgaverne: Opgaverne stilles så de bredt dækker kernestoffet, og så eksaminanderne har mulighed for at demonstrere beherskelse af de metoder, der er omfattet heraf.

A.4.3 Anden del af den skriftlige prøve

Praktiske forhold: Til den anden del af den skriftlige prøve gives der 4 timer. Eksaminanderne må til denne del af prøven benytte alle hjælpemidler bortset fra programmer og lommeregnere, der kan udføre abstrakt algebraisk symbolmanipulation.

Opgaverne: Opgaverne udformes mhp. at give eksaminanderne mulighed for at demonstrere, i hvilken grad de hver især har udviklet problemhåndterings-, symbolbehandlings- og ræssonementskompetence inden for centrale dele af de fem kerneområder. Mindst en af opgaverne skal være valgfri.

A.4.4 Bedømmelse

Første del af den skriftlige prøve: Ved bedømmelsen af en eksaminands besvarelse af den enkelte opgave lægges der vægt på de anvendte metoder og beregningers korrekthed.

Anden del af den skriftlige prøve: Ved bedømmelsen af en eksaminands besvarelse af den enkelte opgave lægges vægten hovedsageligt på, i hvilken grad vedkommende har demonstreret besiddelse af problemhåndterings-, symbolbehandlings- og ræssonementskompetence, og kun i mindre grad på, om løsningsstrategien er i overensstemmelse med det forventede.

Karaktergivning: Ved fastsættelsen af en eksaminands karakter indgår såvel bedømmelssen af de enkelte opgaver som en helhedsvurdering af besvarelsen af de to opgavesæt. Der gives én samlet karakter.

B Uddrag fra logbogen over den observerede undervisning

Det følgende er et uredigeret uddrag fra logbogen over den observerede del af undervisningen i Allerød-forsøget (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik af forsøget). Uddraget er dels valgt fordi det både eksemplificerer sessioner hvor der blev taget mange og sessioner hvor der blev taget få noter, dels fordi der er tale om episoder som der direkte henvises til i analysen (se afsnit 13.2 (side 216ff). Den sidste af de gengivne sider er en oversigt over de former for kodning som blev brugt i forbindelse med logbogs-skrivningen.

I afsnit 12.3.3 (side 204f) er der gjort nærmere rede for hvordan observationerne af undervisningen blev gennemført.

18. april 2001

08.16: K, GG Introduktion til problemopgaver med udfoldninger.
A, PL-MS Kopiark med opgaveudfoldninger.
09.26: K, GG Opg. 42.
09.34: K, GG, O M-L Fælles snak om oplevelsen med udfoldninger.
09.55: Slut.

25. april 2001

08.13: K, GG, O Planen den kommende tid.
08.17: K, GG, KOP4 H-L Eksemplarisk gennemløb af en modelleringsproces; "Den bedste beholder til fx. mælk":

- Den der ser smartest ud.
- Den der er bedst at holde på.
- Den der er mindst materialekrævende.
- Den der er bedst at transportere.

Systematisering og matematisering af hver vinkling i fællesskab med reference til seksfase-modellen.
08.57: Båndskift og pause.
09.07: G4, M-OF, KOP4 Forslag bragt på banen:

- Tømning af swimmingpool.
- Prispolitik på teaterbilletter.

- Grundformen som en fodbold er syet af.
- "Tre skibe og to havne" (lineær programmering).
- Hvad koster det at bygge World Trade Center i New York? (09.28)

09.17: TL frem mod afleveringen.

09.21: Videre med M-OF.

09.27: G4, M-OF, KOP1+KOP4 F-D Useriøse forslag til OF fremsættes i et opgivende tonefald.

09.30: K hjælper; gå efter simple og let overskuelige problemstillinger.

09.35: G4, AN, KOP4 K giver rapporter tilbage fra sidste projektarbejde.

09.38: G4, M-SA, KOP4 Arbejde med et af K's forslag: "Hvor tæt skal grantræer plantes på en plantage?"

09.40: G4, M-SA, KOP4 Arbejde med et af K's forslag: "Hvis jeg skal bygge en trappe hvor høje skal trappetrinnene så være for at jeg skal bruge mindst mulig energi?"

09.45: Bla.

09.49: Snak med K om valget af at se på trappetrin.

09.52: Slut.

14. maj 2001

08.19: G4, M-SA, KOP4 Hvilke forhold bør indgå i beregningerne: Energiindtag (mad)? Hastighed op ad trappen? Vægt? Højde?

08.27: C og E går for at kontakte relevante firmaer.

08.32: L+W, M-SA, KOP1+KOP4 F-D "Vi vil jo ikke se på kinetisk og potentiel energi men på hvor meget energi kroppen forbruger. Hænger Det sammen? Hvad er nyttevirkning?"

08.40: Slut på O.

08.44: L+W+K, M-SA, KOP1+KOP4 F-D L: "Det er svært at finde en opgave som ikke er for stor og som samtidig er interessant og en vi gider arbejde med. Vi er i gruppen nok lidt uenige om hvilken opgave vi stiller." Pigerne vil inddrage beregninger af energiindtaget (mad), drengene hellere nøjes med beregninger over energiforbruget. K's forsøg på at hjælpe afhjælper ikke for alvor frustrationen over ikke at kunne finde en god skæring.

08.52: G4, M-OF, KOP1+KOP4 F-D Drengene kommer begejstrede tilbage fra deres møde med virkeligheden i form af en "sej gut" fra en virksomhed. L: "Nu må vi altså lige blive enige om denne her opgave. Det holder ikke bare at proppe en graf ind hvis vi mangler lidt stof."

08. 57: F-D L foreslår at overveje at se på forskellige fødevarer som alternativ til fokus i den nuværende opgave, som virker svær at have med at gøre. C: "Hvis vi sammenligner alm. trappe, rulletrappe og elevator må vi have nok." L: "Det er mere noget med at finde en opgave som er interessant."

09.02: Pause.

09.07: L+W, M-MS, KOP4 Videre med trappeberegningerne: Om sammenhængen mellem tid, længde, højde og energiforbrug (formler for hhv. kinetisk og potentiel energi).

09.14: G4, M-MS Pause og herefter fortsatte regnerier.

10.14: G4, M-SA, KOP4 Er hastigheden eller effekten konstant for en rulletrappe? Hvad betyder antallet af personer? Om antagelser der er så grove at de fjerner den matemtiske substans i opgaven vs. villigheden til at bide skeer med en vanskeligere opgave.

10.24: Bla.

10.28: G4+K, M-SA, KOP4 H-L L: "Nu er vi nået til at vi har en masse oplysninger, men hvordan fanden skal vi sammenligne dem?" K hjælper: Lav et scenarie at regne på, fx. transport i et stormagasin.

10.32: Båndskift.

10.33: G4, M-MS, KOP4 Afgrænsning af stormagasinscenariet; energiforbrug pr. person transporteret.

10.35: G4, M-MA, KOP4 Beregning af personenergiforbruget for hhv. alm. trappe, rulletrappe og elevator.

10.51: Slut.

16. maj 2001

08.21: K, GG H-L Snak om strategi ifm. prøven med hjælpemidler; fordele og ulemper ved hhv. gruppeseance undervejs vs. hjælpespørgsmål som kan "købes".

09.05: Prøveopgaverne regnet på tavlen.

21. maj 2001

12.45: G4, TL Arbejdet frem mod aflevering.

12.58: M-OF, KOP4 Diskussion; ambitionsniveauet i OF vs. tidsforbruget.

13.05: G4, M-MA, KOP4 Fortsatte beregninger af personenergiforbruget for hhv. rulletrappe, alm. trappe og elevator.

13.21: G4, TL, KOP4 H-E Diskussion; hvilke dele skal rapporten indeholde, og hvor langt er vi med hver del?

13.27: Pause.

13.53: G4+K, M-OF, KOP4 Diskussion af OF med K; "spørg mere direkte" (bedre afgrænset).

13.58: G4, PA-U Snak om rapportens navn.

14.02: G4, M-OF Skærpelse af OF.

14.05: G4, TL Fordeling af arbejdsopgaverne.

14.30: G4, M-MS, KOP4 F-P Matematisering af personenergiforbruget ved at bruge en rulletrappe. Alle arbejder meget koncentreret – også mens Jonas tilbagevendende forsøger at aflede opmærksomheden – med deres eget bud på en løsning, og delforslag fremlægges for gruppen med mellemrum.

K hjælper undervejs.

14.42: Båndskift.

15.04: Slut.

Forkortelser

Fokus på

- A Alle.
- K Karsten.
- T Tomas.
- AS [elev (pige)].
- B [elev (pige)].
- C [elev (dreng)].
- D [elev (pige)].
- E [elev (dreng)].
- J [elev (pige)].
- L [elev (pige)].
- N [elev (pige)].
- G1 Gruppe med AS, D, J, L og N.
- G2 Gruppe med D, J, L og N.
- G3 Gruppe med D, J og N.
- G4 Gruppe med B, C, E og L.

Aktivitet

- ...-PX ... ifm. projektarbejde X.
- GG Lærerstyret oplæg/gennemgang.
- TS Teoristudier.
- OR Opgaveregning.
- ØR Øvelsesregning.
- PL-I Problemløsning – intern.
- PL-MS Problemløsning – matematisering.
- GR Gruppedannelse.
- OA Opgaveafgrænsning.
- OF Opgaveformulering.
- TL Tilrettelæggelse.
- DI Dataindsamling.
- PA-U Projektarbejde – udførelse.
- EV Evaluering.
- PE Perspektivering.
- AN Andet.
- M-OF Modellering – opgaveform.
- M-SA Modellering – systemafgr.
- M-MS Modellering – matematisering.
- M-MA Modellering – mat. analyse.
- M-TR Modellering – tolkning og vurd. af resultater.
- M-VV Modellering – vurdering af modellens validitet.

Håndtering

- O Optaget.
- G Gennemset.
- KOPX Kopieret over på bånd X.
- DIS Diskuteret.
- UDS Udskrevet.

Fokusområder

- B-E Begrundelsesdiskussioner – Elevinitieret opmærks.
- B-L Begrundelsesdiskussioner – Lærerinitieret opmærks.
- K-E Kompetencebeskrivelser – Elevinitieret opmærks.
- K-L Kompetencebeskrivelser – Lærerinitieret opmærks.
- M-E Metakogn. og kontrol generelt – Elevinitieret opmærks.
- M-L Metakogn. og kontrol generelt – Lærerinitieret opmærks.
- A-E Aktivitetformers (PR, PL, ØR) forskel. læringspotent. – Elevinitieret opmærks.
- A-L Aktivitetformers (PR, PL, ØR) forskel. læringspotent. – Lærerinitieret opmærks.
- H-E Heuristik – Elevinitieret opmærks.
- H-L Heuristik – Lærerinitieret opmærks.
- F-G Følelser og forestillinger – Generelt om mat., mat.uv. og eget forhold hertil.
- F-P Følelser og forestillinger – Problemløsningsfrustration af typen “jeg ved hvor jeg skal hen, men ikke hvordan jeg skal kommer der”.
- F-D Følelser og forestillinger – deltagerstyringsfrustration af typen “jeg ved *ikke* hvor jeg skal hen, og kan derfor ikke komme i gang”.

C Oplæg til elevernes arbejde

Det følgende er en uredigeret gengivelse af den opgavegruppering med tilhørende enkeltopgaver som blev udviklet i tilknytning til Allerød-forsøget (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik af forsøget og opgavernes rolle heri).

Baggrunden for grupperingen af opgaverne, som overordnet består af afsnittene "Oplæg til undersøgelser" og "Oplæg til korterevarende opgaveløsning", er forklaret i afsnit 12.2.2 (side 195f).

C.1 Oplæg til undersøgelser

C.1.1 Sigte: Udvikling af modelleringskompetence

Opgave 1.1.1 Kan man motionere sig slank?

Opgave 1.1.2 Hvad er sammenhængen mellem ens indkomst og den skat man betaler?

Opgave 1.1.3 Hvor dyrt er det at tale i mobiltelefon?

Opgave 1.1.4 Hvor mange vindmøller skal der bygges i Danmark?

Opgave 1.1.5 Hvor mange molekyler er der i et stykke kridt?

Opgave 1.1.6 Hvilket internet-abonnement skal man vælge?

Opgave 1.1.7 Hvor lang tid skal en nylavet kop the stå, før den er rar at drikke?

Opgave 1.1.8 Hvor lang tid før man ønsker at drikke den, skal en øl sættes i køleskabet?

Opgave 1.1.9 Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde i Danmark sig?

Opgave 1.1.10 Hvordan kan man sejle i andre retninger end med vinden i en sejlbåd?

C.1.2 Sigte: Udvikling af anvendelseskritisk kompetence

Opgave 1.2.1 Hvordan virker en cykel-computer?

Opgave 1.2.2 Hvordan virker GPS-navigering?

Opgave 1.2.3 I forbindelse med en kampagne for at nedsætte farten i byerne bruges sloganet “$10 = 44$”. Hvad er meningen?

Opgave 1.2.4 Hvor hurtigt svinger et pendul?

Opgave 1.2.5 Hvordan benytter landmålere sig af matematik?

Opgave 1.2.6 Hvordan fastsættes prisen på en vare?

Opgave 1.2.7 Hvordan laver man stikprøveundersøgelser?

Opgave 1.2.8 Hvordan laver man opinionsundersøgelser?

Opgave 1.2.9 Hvordan kan man vurdere atomkraftværkers sikkerhed?

Opgave 1.2.10 Hvor sikker er en vejrudsigt?

Opgave 1.2.11 Hvilken af de låneformer, der tilbydes, skal man vælge, når man skal optage et lån i banken?

C.1.3 Sigte: Udvikling af kulturhistorisk kompetence

Opgave 1.3.1 Hvorfor findes der forskellige talsystemer?

C.1.4 Sigte: Udvikling af strukturel kompetence

Opgave 1.4.1 Hvad skal der til for at man kalder noget et matematisk bevis?

C.2 Oplæg til korterevarende opgaveløsning

C.2.1 Modelleringsopgaver

Tal og algebra

Opgave 2.1.1 Modellér hvor meget ekstra et forældrepar skal tjene for at have et eller flere børn boende.

Opgave 2.1.2 Modellér hvor lang tid før du skal møde du skal hjemmefra om morgenen.

Opgave 2.1.3 Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.

Opgave 2.1.4 Modellér hvor meget en kran kan løfte.

Opgave 2.1.5 Når to personer sammen skal bære en stige (eller en anden lang genstand), vil man normalt tage fat i hver sin ende. Hvis de to personer ikke er lige stærke kan den stærkeste imidlertid aflaste den mindre stærke ved at tage fat længere inde på genstanden.

Modellér hvordan fordelingen af belastningen afhænger af hvor den stærkeste tager fat.

Opgave 2.1.6 Modellér hvor mange elevatorer der er brug for i et stormagasin med mange etager.

Opgave 2.1.7 Modellér hvordan en række trafiklys langs en stor befærdet vej skal være indstillet for at flest mulige bilister oplever “grøn bølge” (dvs. at alle trafiklysene er grønne når man skal passere dem).

Geometri

Opgave 2.1.8 Modellér hvor langt væk horisonten er.

Opgave 2.1.9 Modellér om det er muligt at se Storebæltsbroen fra Mols Bjerge.

Opgave 2.1.10 Modellér hvor det er bedst at stå, når man skal se på et maleri.

Opgave 2.1.11 I rugby kan man bl.a. score point ved at skyde bolden mellem to målstænger. Sparket skal foretages et selvvalgt sted på en linje, som er ude i siden af banen og ligger parallelt med sidelinjen (vinkelret på linjen målstængerne står på).

Modellér hvor på linjen det er bedst at stille sig.

Opgave 2.1.12 Modellér – og diskuter på baggrund af modellen – hvornår det er rimeligt at anvende plangeometri til beregning af afstande på jorden.

Opgave 2.1.13 Modellér hvilken vinkel en solfanger skal anbringes i.

OPGAVE 2.1.14 Modellér hvor meget kørebanen skal hælde i et vejsving.

OPGAVE 2.1.15 Modellér hvor lang en stige man kan få rundt om et hjørne.

OPGAVE 2.1.16 Modellér hvor mange gange man kan børste tænder med en tube tandpasta.

OPGAVE 2.1.17 Modellér hvilken vej en livredder, som befinder sig et stykke oppe på en strand, skal vælge ud til en person som er ved at drukne.

OPGAVE 2.1.18 Modellér ved hvilken vinkel et skævt tårn vælter.

OPGAVE 2.1.19 Modellér hvor langt nålen bevæger sig under afspilning af en grammofonplade.

OPGAVE 2.1.20 Modellér hvor højt et snapseglas skal skænkes for at være halvt fyldt.

OPGAVE 2.1.21 I gamle dage målte man ofte en vintøndes indhold ved at måle diagonalen med en stok. Kommentér denne metodes anvendelighed.

OPGAVE 2.1.22 Ved at rulle to stykker papir sammen til rør, så det ene kan glide frem og tilbage inden i det andet, kan man lave et "teleskop" med forskelligt synsfelt.

Modellér hvor stort et synsfelt man kan se på denne måde.

Funktioner

OPGAVE 2.1.23 Modellér temperaturudviklingen i et glas isvand.

OPGAVE 2.1.24 Modellér udviklingen i antallet af kinesere med den nuværende etbarns-politik, hvor det gøres meget besværligt at have mere end ét barn.

OPGAVE 2.1.25 To cyklister er lige hurtige. De kører selvfølgelig begge hurtigere i plant terræn end i bakket.

Modellér forskellige mulige forløb for afstanden mellem dem som funktion af tiden på en given rute med begge typer terræn, når nummer to starter med et forspring.

Differentialregning

OPGAVE 2.1.26 Modellér hvilken form en tagrende skal have.

OPGAVE 2.1.27 Modellér hvad der er den optimale form på en konservesdåse.

OPGAVE 2.1.28 Modellér hvor meget man skal drikke af en dåseøl for at minimere risikoen for, at den vælter.

OPGAVE 2.1.29 Modellér hvor meget større en hønsegård kan blive hvis man har en mur at bygge opad ift. hvis man bygger den fritstående.

OPGAVE 2.1.30 I forbindelse med et stort byggeri skal en masse jord køres væk efterhånden som det bliver gravet op.

Modellér hvor store lastbiler det kan betale sig at leje til formålet.

OPGAVE 2.1.31 Et stakit skal deles i to dele, som skal danne en lukket indhegning ved at blive anbragt ind imod en mur.

Hvordan skal de deles og anbringes for at indhegningen bliver så stor som muligt?

Sandsynlighedsregning og kombinatorik

OPGAVE 2.1.32 Modellér en fornuftig prisstrategi hvis man i forbindelse med en skolefest gerne vil lade gæsterne i baren spille om ølprisen ved at “klunse” med bartenderen efter følgende regler:

a) Begge parter får hver tre tændstikker til en start.
b) De vælger nu hver især et antal tændstikker mellem 0 og det antal de råder over (som altså til at begynde med er 3), som de holder frem skjult for modparten i en knyttet hånd.
c) De får nu hver én chance for at gætte hvor mange tændstikker der *i alt* er i de to hænder. Det er ikke tilladt at gætte på det samme tal.
d) Den der er længst fra det rigtigt antal skal af med en tændstik. Er man lige langt fra er der ingen der skal af med en tændstik.
e) Spillet gentages nu fra trin b) og frem indtil den ene part har mistet alle sine tændstikker. Vedkommende har tabt spillet.

OPGAVE 2.1.33 DSB offentliggør med mellemrum en statistik over hvor forsinkede togene har været på en given station i en given periode. For Roskilde station så tallene sådan ud i januar 2002:

0	–	2 min.	86,7 %
3	–	5 min.	8,9 %
6	–	15 min.	3,3 %
16	–	30 min.	0,9 %
30	<	min.	0,2 %

Modellér hvad risikoen er for at misse en forbindelse, hvis du ankommer med et tog, som du ifølge køreplanen lige netop kunne nå et andet tog med.

C.2.2 Matematiseringsopgaver

Tal og algebra

OPGAVE 2.2.1 Hvis søslangen i Loch Ness er 40 meter lang plus halvdelen af sin egen længde, hvor lang er den så?

Opgave 2.2.2 En flaske vin koster 43,- kr. inklusive pant for flasken. Indholdet koster 40,- kr. mere end panten. Hvad meget er panten?

Opgave 2.2.3 Arne, Bent og Curt har en tipsklub, hvor de deler gevinster efter deres indsats. Af en gevinst får Arne halvdelen, Bent en fjerdedel og Curt en sjettedel – mens de bestemmer at give resten på 2500 kr. til Røde Kors. Hvor stor er gevinsten?

Opgave 2.2.4 To biler A og B holder ved den samme vej. De sætter begge igang samtidig og kører i samme retning, A med 80 km./time, B med 60 km./time. Hvor længe er A bag B, hvis A fra starten holdt 5 km. længere nede ad vejen?

Opgave 2.2.5 I disse CD-tider er du blevet træt af din samling af skrattende LP-plader, og beslutter derfor at forære dem væk. Din mor forærer du halvdelen af pladerne plus $\frac{1}{2}$. Din far får halvdelen af, *hvad der er tilbage,* plus $\frac{1}{2}$. Den sidste plade får postbuddet. Hvor mange LP-plader havde du?

Opgave 2.2.6 En fabrik planlægger at starte en produktion af smølfikokker. Der skal investeres 150 000 kr. i nye maskiner, og herefter koster det 28 kr./stk. at producere dem. Salgsprisen for smølfikokker på det danske marked er 46 kr./stk. Hvor mange enheder skal der sælges, før produktionen giver overskud?

Opgave 2.2.7 Et firma har påtaget sig at udføre et arbejde på 50 dage og benytter i begyndelsen 66 mand til arbejdet. Efter 28 arbejdsdage er netop halvdelen af arbejdet udført. Med hvor mange mand skal arbejdsstyrken øges, for at arbejdet kan afsluttes rettidigt?

Opgave 2.2.8 En tur med en rulletrappe tager 20 sekunder hvis man lader rulletrappen gøre hele arbejdet og 10 sekunder hvis man løber op ad den rullende trappe. Hvor lang tid tager det at løbe op hvis rulletrappen står stille?

Opgave 2.2.9 To løbere træner på en 400 meter bane rundt om stadion. Den ene kan løbe tre gange rundt, mens den anden løber to gange. Hvis de starter på samme punkt af banen og løber hver sin vej, mødes de efter 40 sekunder. Hvor hurtigt løber hver af dem?

Opgave 2.2.10 Forestil dig, at du er på vej over en smal jernbanebro, og netop i det øjeblik, du er nået 3/8 af vejen over broen, hører du bagfra et tog komme i det fjerne. For at forsøge at komme af broen inden toget kommer, kan du nu enten løbe tilbage mod toget eller løbe videre over broen. Du kan løbe 25 km/t, og med den fart viser det sig, at du i begge tilfælde lige akkurat kan nå til enden af broen samtidig med toget. Hvor hurtigt kører toget?

Opgave 2.2.11 På en mark, der er 20 meter på hver led, vil man anlægge to grusstier, der går tværs over marken på hver sin led.

a) Hvor brede stier kan man anlægge, hvis man kun har grus nok til at dække 15% af markens areal?

b) Hvor brede kan stierne være, hvis man kun lægger gruset i et halvt så tykt lag?

c) Hvorfor er svaret ikke det dobbelte af før?

Opgave 2.2.12 En nydelig frugtanretning på et stort fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem 100 og 200 bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun, indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det, der lå lige efter det allerførste hun spiste.

Hvor mange bær var der oprindelig?

Opgave 2.2.13 Hvornår passerer den store viser den lille på et ur?

Opgave 2.2.14 Du får valget mellem to opsparingskonti: Den ene giver 8% om året i rente, den anden giver 110 kr. om året i rente. Hvilken konto foretrækker du? Begrund svaret.

Opgave 2.2.15 Et teater hæver billetprisen med 30%. Det medfører, at den samlede billetindtægt stiger med 17%. Med hvor mange procent har publikumstallet ændret sig?

Afhænger svaret af størrelsen af hhv. billetpris, billetindtægt og publikumstal? Begrund svaret.

Opgave 2.2.16 Hvordan afhænger den skat man betaler af indkomstskatteprocenten og moms-procenten?

Opgave 2.2.17 Under udsalg får man ofte rabat som en procentdel af varens normale pris. Er det smartest at bede om at få rabatten trukket fra før eller efter momsen lægges til prisen? Begrund svaret.

Opgave 2.2.18 Hvis man til et tal lægger et bestemt antal procent, og derefter trækker det samme antal procent fra resultatet, ender man ikke med det tal, man startede med. Hvorfor ikke?

Hvis det tal, man slutter med, er 84% af det tal, man startede med, hvor mange procent har man så lagt til og derefter trukket fra?

Opgave 2.2.19 Kølesystemet i en bil rummer 5 liter. Der er hældt kølervæske på, så den udgør 15% af indholdet. På grund af udsigt til streng frost vil bilens ejer forøge andelen af kølervæske. Det gør hun ved at tappe en vis mængde af og fylde op med ren kølervæske.

a) Hvor stor bliver andelen af kølervæske, hvis hun aftapper 2 liter og fylder op med ren kølervæske?

b) Hvor meget skal hun tappe af, hvis andelen af kølervæske skal være 25%?

c) Opstil en matematisk model for sammenhængen mellem andelen af kølervæske i den færdige blanding, og mængden der aftappes og erstattes med ren kølervæske.

   Diskutér anvendelsen af den opstillede model.

Opgave 2.2.20 "En ny rapport fra Københavns Politi tegner et dystert billede. Mennesker af udenlandsk herkomst udgør 16 procent af indbyggerne i København, men står for 42 procent af voldssagerne" (*Aktuelt* 26. november 1999).

Hvor mange gange mere voldelige er mennesker af udenlandsk herkomst end mennesker af dansk herkomst i gennemsnit ifølge disse oplysninger?

Geometri

Opgave 2.2.21 Hvor mellem tre lige store byer skal områdets eneste gymnasium ligge?

Opgave 2.2.22 Ved placering af regnmålere forsøger man at mindske vindens indflydelse på regndråbernes baner ved hjælp af passende læforhold. Ifølge nogle eksperimenter skal regnmåleren placeres $1,5$ meter oppe i luften, og med en sådan afstand til træer eller lignende at vinklen mellem vandret og sigtelinjen fra regnmåleren til trætoppen er mellem $15°$ og $30°$.

Hvordan afhænger de afstande fra en gruppe træer, som en regnmåler kan placeres i, af træernes højde?

Opgave 2.2.23 I forbindelse med opførelse af et nyt hus ansøges teknisk udvalg i kommunen om lov til at bygge med en taghældning på $5°$ mere end de tilladte $45°$.

a) Hvor meget højere bliver et hus hvis taghældningen ændres fra $45°$ til $50°$?

b) Ansøgerens hus er $9,20$ meter bredt. Hvor stor kan taghældningen blive, hvis teknisk udvalg kan acceptere en højde på en halv meter mere end den højde, en taghældning på $45°$ ville give?

Funktioner

Opgave 2.2.24 Hvis vi her på skolen skal have trykt et skoleblad ude i byen, kan en ikke helt urealistisk pris for dette være, at trykkeren skal have 1500,- kr. til dækning af startudgifterne, og herudover 2,- kr. pr. stk. vi får trykt.

a) Hvor mange blade skal vi regne med at kunne sælge (hvilket vi regner med er det samme som det antal vi bestiller hos trykkeren), for at stykprisen kommer ned under fx. 5,- kr., hvis vi tror, det er det højeste, vi kan få folk til at betale for bladet?

b) Hvordan afhænger den mindst mulige stykpris af det forventede antal solgte blade?

c) Hvad er hhv. største- og mindsteværdien?

Opgave 2.2.25 Fem venner vil starte en cykelklub. For at øge medlemstallet vedtages det, at alle medlemmer hvert kvartal skal hverve tre nye medlemmer indtil man er nået op på 1000 i alt, hvorefter der oprettes venteliste.

Karakterisér udviklingen i medlemstallet.

Opgave 2.2.26 Karakterisér din samlede pengemængde i følgende situation:

Du sætter alle dine sparepenge i banken og får almindelig rente i et år. Herefter og et år frem er renten faldet til det halve, hvorefter banken holder op med at tilskrive rente. Efter tre år begynder du at hæve på kontoen: Det første år et fast beløb hver måned, herefter en fast procentdel af hvad der står på kontoen hver måned.

Opgave 2.2.27 I spillet "Tårnene i Hanoi" skal man flytte et antal cirkelskiver med hul i midten fra den ene af tre pinde til en anden af pindene. Man må kun flytte en skive af gangen fra en pind til en anden. Cirkelskiverne er af forskellig størrelse og må ifølge reglerne aldrig ligge med en større skive oven på en mindre. Fra starten ligger de derfor også med den største skive nederst, så den næststørste osv. frem til den mindste som ligger øverst.

Hvad er det mindste antal skiveflytninger der skal til hvis der er n skiver at flytte?

Differentialregning

Opgave 2.2.28 En rektangulær indhegning skal laves så den består af to dele adskilt af et hegn.

Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

Opgave 2.2.29 En indhegning skal laves så den har form som et rektangel med en halvcirkel i den ene ende.

Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

Opgave 2.2.30 En løbebane af form som et rektangel med en halvcirkel i hver ende skal være 400 m lang.

Hvilke dimensioner skal løbebanen have for at den rektangulære plæne den indeslutter bliver så stor som muligt?

Opgave 2.2.31 En kasse uden låg skal være $1,6$ gange så lang, som den er bred og have et bestemt rumfang.

Hvordan skal kassen udformes for at overfladearealet bliver mindst muligt?

Opgave 2.2.32 Et stakit skal deles i to dele, som skal danne en lukket indhegning ved at blive anbragt ind imod en mur.

Hvordan skal de deles og anbringes for at indhegningen bliver så stor som muligt?

Opgave 2.2.33 En beholder består af en cylinder med en halvkugle ovenpå.

Hvilke dimensioner skal beholderen have for at minimere materialeforbruget?

Sandsynlighedsregning og kombinatorik

Opgave 2.2.34 A, B og C har udfordret hinanden på pistol. A træffer dødeligt med 100% sikkerhed, B med 80% og C kun med 50%. De stiller sig op i en ligesidet trekant og må nu skyde et skud af gangen efter tur. Der trækkes lod om startrækkefølgen.

Hvad er hver af de tre personers chance for at overleve?

Opgave 2.2.35 En bestemt kabale går gennemsnitligt kun op hver tyvende gang, og det synes ivrige Iben er for lidt. Hun har derfor fundet på en måde at snyde der gør, at kabalen gennemsnitligt går op hver anden gang. Ivrige Iben er dog tilfreds hvis kabalen gennemsnitligt går op hver tiende gang, så hun slipper for at snyde hver gang.

Hvor tit er det nødvendigt at snyde?

Opgave 2.2.36 Lad os antage at en god tennisspiller lykkes med $2/3$ af sine server hvis han eller hun satser og slår igennem, mens $9/10$ af de blødere og mere skruede server kommer i spil.

a) Hvad er risikoen for dobbeltfejl hvis der satses på både første- og andenserven?

b) Hvad er risikoen hvis der serves blødt og skruet på begge server?

c) Hvad er risikoen hvis der satses på førsteserven og serves blødt og skruet på andenserven?

d) Hvor sikker skal serverne være i hver af tilfældene a), b) og c) hvis risikoen for dobbeltfejl skal ned under 10%?

C.2.3 Svar-åbne internt matematiske opgaver

Der er ikke blevet udviklet opgaver i denne kategori.

C.2.4 Svar-lukkede internt matematiske opgaver

Tal og algebra

Opgave 2.4.1 Bevis at tre altid går op i summen af tre på hinanden følgende hele tal.

Opgave 2.4.2 Bevis at 9 går op i et tal hvis og kun hvis 9 går op i summen af cifrene i tallet.

Opgave 2.4.3 Opstil og bevis en formel for summen af de hele tal fra 1 til n.

Geometri

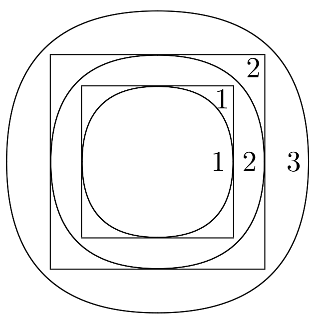
Opgave 2.4.4 Hvilken geometrisk grundform har mindst overfladeareal i forhold til volumen?

Opgave 2.4.5 Hvilke mål skal en cylinderformet dåse have for at materialeforbruget bliver så lille som muligt i forhold til et givet volumen?

Opgave 2.4.6 Af en kegle skal der "skæres" en cylinder (tænk fx. på en træstamme som der skal laves en rund stolpe af). Hvordan skal "snittet" lægges for at cylinderens volumen bliver så stort som muligt?

Opgave 2.4.7 Tegningen her skal illustrere en situation, hvor kvadrat 1 er det omskrevne kvadrat til cirkel 1, cirkel 2 omskriver kvadrat 1, kvadrat 2 er det omskrevne kvadrat til cirkel 2, osv.

Hvad er forholdet mellem arealet af cirkel 1 og arealet af cirkel n?



Opgave 2.4.8 Inden i en ligebenet trekant med sidelængderne 5, 5 og 6 lægges en anden ligebenet trekant på hovedet således at grundlinjerne er parallelle. Hvad skal sidelængderne være i den indskrevne trekant for at dens areal bliver så stort som muligt?

Opgave 2.4.9 En ligebenet trekant deles i to dele vha. en streg parallel med den side i trekanten, som ikke udgør "benene". Hvordan skal stregen placeres for at trekantens to dele får samme areal?

Opgave 2.4.10 To cirkler af forskellig størrelse tangerer hinanden. Samtidig tangerer begge cirkler den samme rette linje i to punkter. Hvordan afhænger afstanden mellem disse to punkter af produktet af cirklernes radier?

Opgave 2.4.11 Hvad er forholdet mellem arealet af en cirkels indskrevne og omskrevne kvadrat?

Opgave 2.4.12 Hvad er forholdet mellem arealet af en cirkels indskrevne og omskrevne ligesidede trekant?

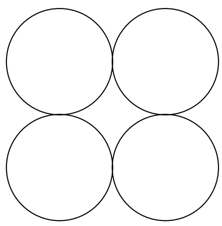
Opgave 2.4.13 Hvor stor en del af en kugles volumen udgør den indskrevne terning?

Opgave 2.4.14 Bevis en formel for vinkelsummen i en regulær n-kant.

Opgave 2.4.15 Bevis en formel for arealet af en ligesidet trekant.

Opgave 2.4.16 Fire cirkler er som skitseret på figuren her placeret symmetrisk så de uden at overlappe danner et lukket område mellem sig.

Hvad er arealet af dette område?



Opgave 2.4.17 To ens kvadrater tænkes anbragt så et af hjørnerne i det ene kvadrat er placeret i midten af det andet kvadrat. Hvordan skal de drejes i forhold til hinanden for at arealet af det stykke de overlapper bliver størst muligt?

Opgave 2.4.18 Givet et kvadrat ABCD. Gennem A, B og C tegnes tre parallelle streger på en sådan måde at stregerne ikke er parallelle med siderne i kvadratet og så kun én linie går gennem kvadratet. Afstandene mellem de parallelle linier er henholdsvis 5 og 7.

Hvad er arealet af kvadratet?

Opgave 2.4.19 En ternings rumfang er n gange en anden ternings. Hvad er forholdet mellem overfladerne på de to terninger?

Funktioner

Opgave 2.4.20 For hvilke af de funktionstyper, du kender, kan man finde halverings- eller fordoblingskonstanter? Begrund svaret.

Differentialregning

Der er ikke blevet udviklet opgaver i denne kategori.

Sandsynlighedsregning og kombinatorik

Opgave 2.4.21 Et muligvis lettere ubrugelig ordbog består af alle kombinationer af bogstaverne i ordet *Bogstav*. Dette ord er det første ord i ordbogen og definerer derved rækkefølgen af bogstaverne. Hvilket ord kommer lige efter "vogbast"?

Opgave 2.4.22 En række punkter på et stykke papir forbindes med streger. Hvis der kun må gå en streg mellem to punkter er der selvfølgelig en grænse for hvor mange streger man kan tegne; en streg hvis der er to punkter, tre streger hvis der er tre punkter, osv. Hvor mange streger kan man tegne hvis der er n punkter?

Opgave 2.4.23 En magisk firkant er et kvadrat bestående af $3 \cdot 3$ mindre kvadrater. I hver af de 9 felter skal der skrives et helt tal på en sådan måde, at summen af tallene i hver af de 3 rækker, de 3 søjler og de 2 diagonaler giver det samme tal.

Hvor mange sådanne magiske firkanter kan man lave ?

D Vejledende eksamensopgaver i problemløsning

Det følgende er en uredigeret gengivelse af de vejledende eksamensopgaver som blev udviklet i tilknytning til Allerød-forsøget (se kapitel 12) og sendt til den daværende fagkonsulent i matematik for det almene gymnasium i marts 2002.

Baggrunden for udviklingen af opgavesamlingen og den sammenhæng indsendelsen heraf indgik i, er forklaret på side 234f.

IMFUFA, RUC
8. marts 2002

Tomas Højgaard Jensen
Karsten Wegener

Vejledende eksamensopgaver i problemløsning ifm. forsøgsundervisning omkring B-niveau i matematik i x-klassen på Allerød Gymnasium 2000–2002

Indhold

1 Modelleringsopgaver

1.1 Tal og algebra

OPGAVE 1.1 Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.

OPGAVE 1.2 Når to personer sammen skal bære en stige (eller en anden lang genstand), vil man normalt tage fat i hver sin ende. Hvis de to personer ikke er lige stærke kan den stærkeste imidlertid aflaste den mindre stærke ved at tage fat længere inde på genstanden.

Modellér hvordan fordelingen af belastningen afhænger af hvor den stærkeste tager fat.

OPGAVE 1.3 Modellér hvor mange elevatorer der er brug for i et stormagasin med mange etager.

OPGAVE 1.4 Modellér hvordan en række trafiklys langs en stor befærdet vej skal være indstillet for at flest mulige bilister oplever "grøn bølge" (dvs. at alle trafiklysene er grønne når man skal passere dem).

1.2 Geometri

OPGAVE 1.5 I rugby kan man bla. score point ved at skyde bolden mellem to målstænger. Sparket skal foretages et selvvalgt sted på en linje, som er ude i siden af banen og ligger parallelt med sidelinjen (vinkelret på linjen målstængerne står på).

Modellér hvor på linjen det er bedst at stille sig.

1.3 Funktioner

OPGAVE 1.6 Modellér temperaturudviklingen i et glas isvand.

OPGAVE 1.7 Modellér udviklingen i antallet af kinesere med den nuværende etbarns-politik, hvor det gøres meget besværligt at have mere end ét barn.

OPGAVE 1.8 To cyklister er lige hurtige. De kører selvfølgelig begge hurtigere i plant terræn end i bakket.

Modellér forskellige mulige forløb for afstanden mellem dem som funktion af tiden på en given rute med begge typer terræn, når nummer to starter med et forspring.

1.4 Differentialregning

Opgave 1.9 Modellér hvilken form en tagrende skal have.

Opgave 1.10 Modellér hvor meget større en hønsegård kan blive hvis man har en mur at bygge opad ift. hvis man bygger den fritstående.

1.5 Sandsynlighedsregning og kombinatorik

Opgave 1.11 Modellér en fornuftig prisstrategi hvis man i forbindelse med en skolefest gerne vil lade gæsterne i baren spille om ølprisen ved at "klunse" med bartenderen efter følgende regler:

a) Begge parter får hver tre tændstikker til en start.

b) De vælger nu hver især et antal tændstikker mellem 0 og det antal de råder over (som altså til at begynde med er 3), som de holder frem skjult for modparten i en knyttet hånd.

c) De får nu hver én chance for at gætte hvor mange tændstikker der *i alt* er i de to hænder. Det er ikke tilladt at gætte på det samme tal.

d) Den der er længst fra det rigtigt antal skal af med en tændstik. Er man lige langt fra er der ingen der skal af med en tændstik.

e) Spillet gentages nu fra trin b) og frem indtil den ene part har mistet alle sine tændstikker. Vedkommende har tabt spillet.

2 Matematiseringsopgaver

2.1 Tal og algebra

Opgave 2.1 To biler A og B holder ved den samme vej. De sætter begge igang samtidig og kører i samme retning, A med 80 km./time, B med 60 km./time. Hvor længe er A bag B, hvis A fra starten holdt 5 km. længere nede ad vejen?

Opgave 2.2 I disse CD-tider er du blevet træt af din samling af skrattende LP-plader, og beslutter derfor at forære dem væk. Din mor forærer du halvdelen af pladerne plus $\frac{1}{2}$. Din far får halvdelen af, *hvad der er tilbage,* plus $\frac{1}{2}$. Den sidste plade får postbuddet. Hvor mange LP-plader havde du?

OPGAVE 2.3 Et firma har påtaget sig at udføre et arbejde på 50 dage og benytter i begyndelsen 66 mand til arbejdet. Efter 28 arbejdsdage er netop halvdelen af arbejdet udført. Med hvor mange mand skal arbejdsstyrken øges, for at arbejdet kan afsluttes rettidigt?

OPGAVE 2.4 En tur med en rulletrappe tager 20 sekunder hvis man lader rulletrappen gøre hele arbejdet og 10 sekunder hvis man løber op ad den rullende trappe. Hvor lang tid tager det at løbe op hvis rulletrappen står stille?

OPGAVE 2.5 To løbere træner på en 400 meter bane rundt om stadion. Den ene kan løbe tre gange rundt, mens den anden løber to gange. Hvis de starter på samme punkt af banen og løber hver sin vej, mødes de efter 40 sekunder. Hvor hurtigt løber hver af dem?

OPGAVE 2.6 En rektangulær indhegning skal laves så den består af to dele adskilt af et hegn.

Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

OPGAVE 2.7 En indhegning skal laves så den har form som et rektangel med en halvcirkel i den ene ende.

Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

OPGAVE 2.8 En kasse uden låg skal være $1,6$ gange så lang som den er bred og have et bestemt rumfang.

Hvordan skal kassen udformes for at overfladearealet bliver mindst muligt?

OPGAVE 2.9 På en mark, der er 20 meter på hver led, vil man anlægge to grusstier, der går tværs over marken på hver sin led.

a) Hvor brede stier kan man anlægge, hvis man kun har grus nok til at dække 15% af markens areal?
b) Hvor brede kan stierne være, hvis man kun lægger gruset i et halvt så tykt lag?
c) Hvorfor er svaret ikke det dobbelte af før?

OPGAVE 2.10 En nydelig frugtanretning på et stort fad er kantet med jordbær. Der er brugt mellem 100 og 200 bær til denne kant. Et lækkersultent barn spiser først et af jordbærrene og begynder derpå at gå rundt og rundt om fadet, idet hun spiser jordbær på følgende måde: Når hun har spist et bær, lader hun det næste ligge, derefter spiser hun det næste, lader det næste ligge, osv. Således fortsætter hun, indtil der kun er et eneste jordbær tilbage. Dette bær er det, der lå lige efter det allerførste hun spiste.

Hvor mange bær var der oprindelig?

OPGAVE 2.11 Et teater hæver billetprisen med 30%. Det medfører, at den samlede billetindtægt stiger med 17%. Med hvor mange procent har publikumstallet ændret sig?

Afhænger svaret af størrelsen af hhv. billetpris, billetindtægt og publikumstal? Begrund svaret.

OPGAVE 2.12 Fra man får sin løn til man står med en vare i hånden betaler man først indkomstskat og siden moms. Hvordan afhænger den samlede skat, man betaler, af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?

OPGAVE 2.13 "En ny rapport fra Københavns Politi tegner et dystert billede. Mennesker af udenlandsk herkomst udgør 16 procent af indbyggerne i København, men står for 42 procent af voldssagerne" (*Aktuelt* 26. november 1999).

Hvor mange gange mere voldelige er mennesker af udenlandsk herkomst end mennesker af dansk herkomst i gennemsnit ifølge disse oplysninger?

2.2 Geometri

OPGAVE 2.14 Ved placering af regnmålere forsøger man at mindske vindens indflydelse på regndråbernes baner ved hjælp af passende læforhold. Ifølge nogle eksperimenter skal regnmåleren placeres $1,5$ meter oppe i luften, og med en sådan afstand til træer eller lignende at vinklen mellem vandret og sigtelinjen fra regnmåleren til trætoppen er mellem $15°$ og $30°$.

Hvordan afhænger de afstande fra en gruppe træer, som en regnmåler kan placeres i, af træernes højde?

2.3 Funktioner

OPGAVE 2.15 Fem venner vil starte en cykelklub. For at øge medlemstallet vedtages det, at alle medlemmer hvert kvartal skal hverve tre nye medlemmer indtil man er nået op på 1000 i alt, hvorefter der oprettes venteliste.

Karakterisér udviklingen i medlemstallet.

2.4 Differentialregning

2.5 Sandsynlighedsregning og kombinatorik

3 Svar-lukkede internt matematiske opgaver

3.1 Tal og algebra

Opgave 3.1 Bevis at tre altid går op i summen af tre på hinanden følgende hele tal.

Opgave 3.2 Opstil og bevis en formel for summen af de hele tal fra 1 til n.

3.2 Geometri

Opgave 3.3 Hvilke mål skal en cylinderformet dåse have for at materialeforbruget bliver så lille som muligt i forhold til et givet volumen?

Opgave 3.4 En ligebenet trekant deles i to dele vha. en streg parallel med den side i trekanten, som ikke udgør "benene". Hvordan skal stregen placeres for at trekantens to dele får samme areal?

Opgave 3.5 Hvad er forholdet mellem arealet af en cirkels indskrevne og omskrevne ligesidede trekant?

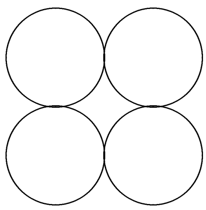
Opgave 3.6 Hvor stor en del af en kugles volumen udgør den indskrevne terning?

Opgave 3.7 Bevis en formel for vinkelsummen i en regulær n-kant.

Opgave 3.8 Bevis en formel for arealet af en ligesidet trekant.

Opgave 3.9 Fire cirkler er som skitseret på figuren her placeret symmetrisk så de uden at overlappe danner et lukket område mellem sig.

Hvad er arealet af dette område?



Opgave 3.10 Givet et kvadrat ABCD. Gennem A, B og C tegnes tre parallelle streger på en sådan måde at stregerne ikke er parallelle med siderne i kvadratet og så kun én linie går gennem kvadratet. Afstandene mellem de parallelle linier er henholdsvis 5 og 7.

Hvad er arealet af kvadratet?

3.3 Funktioner

3.4 Differentialregning

3.5 Sandsynlighedsregning og kombinatorik

E Årsprøve-, terminsprøve- og eksamensopgaver

Det følgende er en uredigeret gengivelse af opgavesættene fra årsprøven i juni 2001, den afsluttende skriftlige terminsprøve i marts 2002, den skriftlige eksamen i maj 2002 og den skriftlige omeksamen i august 2002, alle i tilknytning til Allerød-forsøget (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik). Ved terminsprøven blev der af praktiske årsager ikke som ved de to eksamener stillet et opgavesæt til besvarelse uden hjælpemidler, hvilket er baggrunden for at et sådant sæt ikke optræder i samlingen her.

I kapitel 12 er prøverne indplaceret i det samlede undervisningsforløb, og i afsnit 13.4 analyseres baggrunden for de respektive prøvers udformning og nogle konsekvenser heraf.

ÅRSPRØVE I SKR. MATEMATIK FOR 1.X (FORSØG). PROBLEMOPGAVER MED HJÆLPEMIDLER

FREDAG D. 1. JUNI 2001 KL.10.10-14.10

POINTS : Alle opgaver tæller 25 p. Der skal afleveres 2 af opgaverne 1A, 1B & 1C, og 2 af opgaverne 2A, 2B & 2C. Der kan købes hjælpespørgsmål til alle opgaverne i Opg.1 (RØD) og alle opgaverne i Opg.2 (gul). De koster 20 p pr pakke.

OPG.1A : Ved hvilken vinkel vælter et tårn ?

OPG.1B : Hvor lang en stige kan man få rundt i huset hjemme hos dig ?

OPG.1C : Her er et skema over en klasses valgønsker i idræt. Placér dem bedst muligt ! a betyder primært ønske, b sekundært ønske. Der skal være 5 elever på hver disciplin.

Elevnr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Ridning	a		a	a	a	a		b
Ter.løb		b	b	b	b	b	a	
Svømn.	b	a					b	a
Elevnr.	9	10	11	12	13	14	15	
Ridning	a		a	b	a		a	
Ter.løb	b	a	b		b	a	b	
Svømn.		b		a		b		

VEND !

OPG.2A : Fra man får sin løn til man står med en vare i hånden betaler man først indkomstskat og siden moms. Hvordan afhænger den samlede skat, man betaler, af indkomstskatte-% og moms-% ?

OPG.2B : En kvægavler vil indhegne et stykke jord. Indhegningen skal være rektangulær, og ved hjælp af et hegn parallelt med den ene side skal den deles i to adskilte folde. Der er i alt 600 m hegn til rådighed.
Bestem det størst mulige indhegnede stykke jord.

OPG.2C : Bevis at 3 altid går op i summen af tre på hinanden følgende hele tal.

HUSK AT DER KUN MÅ AFLEVERES 2 OPGAVER BLANDT 1A, 1B & 1C OG KUN 2 BLANDT 2A, 2B & 2C.

SKR. MATEMATIK FOR 1.X / 2001 (FORSØG)

HJÆLPESPØRGSMÅL TIL OPGAVE 1 :

OPG.1A : Lav en tegning og sæt nogle mål på. Hvad afgør om tårnet vælter ?

OPG.1B : Lav en grundplan over en mindre del af et (dit ?) hus og sæt nogle mål på dem og stigen. Hvor får man evt. problemer med at komme rundt med stigen ?

OPG.1C : Hvad er bedst : At flest muligt får opfyldt deres primære ønske
eller at man undgår at nogle slet ikke får opfyldt deres ønske ?
Du kunne evt. prøve med et point-system for hver elev eftersom de får opfyldt deres primære, sekundære ønske eller slet ingen.

SKR. MATEMATIK FOR 1.X / 2001 (FORSØG)
HJÆLPESPØRGSMÅL TIL OPGAVE 2 :

Opg.2A : Følg f.eks. en 1000 kr-seddel gennem skat og moms med forskellige %-satser. Lav en lille tabel. Hvor meget af dens værdi bliver brugt til selve varen og hvor meget går til skat ?

Opg.2B : Kald f.eks. de lodrette sider x, udregn den vandrette udtrykt ved x og find arealet.

OPG.2C : Prøv først med nogle forskellige tal. Kald så det mindste tal ved et bogstav. Hvad kommer de næste to så til at hedde ?

MATEMATIK - FORSØG

TERMINSPRØVE FOR 2.X MED HJÆLPEMIDLER

Fredag d.15.marts 2002 kl.8.00 - 12.00

Efter 20 min. er der 25 min.'s brainstorming i de aftalte grupper
Af opgaverne 1A, 1B & 1C skal to besvares og af opgaverne 2A, 2B & 2C skal to besvares.

1A : Modellér hvor mange elevatorer der er brug for i et stormagasin med mange etager.

1B : I rugby kan man bla. score point ved at skyde bolden mellem to målstænger. Sparket skal foretages et selvvalgt sted på en linje, som er ude i siden af banen og ligger parallelt med sidelinjen (vinkelret på linjen målstængerne står på).

Modellér hvor på linjen det er bedst at stille sig.

1C : Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.

2A : En indhegning skal laves så den har form som et rektangel med en halvcirkel i den ene ende.

Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?

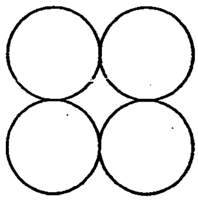
VEND !

2B : Ved placering af regnmålere forsøger man at mindske vindens indflydelse på regndråbernes baner ved hjælp af passende læforhold. Ifølge nogle eksperimenter skal regnmåleren placeres $1,5$ meter oppe i luften, og med en sådan afstand til træer eller lignende at vinklen mellem vandret og sigtelinjen fra regnmåleren til trætoppen er mellem $15°$ og $30°$

Hvordan afhænger de afstande fra en gruppe træer, som en regnmåler kan placeres i, af træernes højde?

2C : Fire cirkler er som skitseret på figuren her placeret symmetrisk så de uden at overlappe danner et lukket område mellem sig.

Hvad er arealet af dette område?



Af opgaverne 1A, 1B & 1C skal to besvares og af opgaverne 2A, 2B & 2C skal to besvares.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2002 **2002-8-2**

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 15. maj 2002 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) Løs ligningen

$$\tfrac{1}{2}(x-4)+\tfrac{1}{4}(20-x)=0\,.$$

b) En cirkel har centrum i punktet $C(1,2)$ og radius 6.

Bestem en ligning for cirklen.

Undersøg, om punktet $Q(4,7)$ ligger på cirklen.

c) Isolér T i formlen

$$V=L\cdot\frac{(T-t)\cdot S}{d}\,.$$

d) En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi 154 og spredning 5.

Bestem $P(152 \leqq X \leqq 160)$.

Bestem $P(X \geqq 157)$.

VEND!

e) En funktion f er bestemt ved $f(x) = b \cdot a^x$.

Bestem tallene a og b, når det oplyses, at $f(2) = 3$ og $f(5) = 24$.

f) En funktion f er bestemt ved $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $Q(3, f(3))$.

Bestem x_0, således at tangenten til grafen for f i punktet $P(x_0, f(x_0))$ er vinkelret på linjen med ligningen $y = 5x + 1$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

2002-8-2X
ALLERØD
FORSØG

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2002

MATEMATISK LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 15. maj 2002 kl 10.00-14.10

I tidsrummet fra 10.25-10.45 kan man mødes i de aftalte grupper

Af opgaverne 1a, 1b og 1c skal kun to besvares
Af opgaverne 2a, 2b og 2c skal kun to besvares

Der tildeles i alt ca. 75 point
Alle opgaver tildeles ca. lige mange point

Opgave 1a

I et ujævnt terræn er tre forskellige steder angivet ved punkterne A, B og C. B ligger på en lille bakke og kan ses fra både A og C. A og C ligger på hver side af bakken og man kan ikke se fra A til C
Til rådighed for det følgende har du en målepind, hvorpå er afmærket et stykke på 2 meter. Endvidere en vinkelmåler, der kan måle vinkler mellem to sigtelinjer samt mellem en sigtelinje og vandret.
Beskriv en fremgangsmåde til at måle højdeforskellen mellem A og B.
Afstanden i fugleflugtslinje fra A til C svarer til længden af linjestykket AC. Beskriv en fremgangsmåde til at bestemme afstanden i fugleflugtslinje fra A til C.

Opgave 1b

Du skal udforme et spil, hvor gevinsten er penge, og hvor der skal være mindst tre forskellige muligheder for gevinst.
Spillet skal udformes således, at sandsynligheden for gevinst, samt gevinstens størrelse er så tillokkende i forhold til prisen for deltagelse i spillet, at spilleglade har lyst til at prøve. Men samtidig skal udbyderne af spillet have udsigt til et pænt overskud, når spillet er afsluttet.

VEND!

Opgave 1c
Modellér hvorledes brædder af en vis længde kan komme rundt om et 90° skarpt hjørne i en kældergang.
Modellen over sammenhængen mellem bræddernes maksimale længde og kældergangens dimensioner ønskes ledsaget af passende tegninger.

Du skal indføre betegnelser for de størrelser, der betyder noget for om brædderne kan komme rundt, samt opstille et matematisk udtryk for sammenhængen mellem disse størrelser.

Hvordan kunne man på grundlag af din model beregne den maksimale længde af brædderne, hvis kældergangens dimensioner er kendt?

Opgave 2a
Der skal bygges en hønsegård i tilknytning til et hønsehus. Hønsehuset er 10 m langt og skal udgøre en del af den ene side af hønsegården. Resten af hønsegården indhegnes med et hønsenet på i alt 120 meter. Vi ønsker en hønsegård med maksimalt areal.
Opstil en matematisk model for dette problem i følgende tilfælde: Hønsegården skal være rektangulær.
Modellen skal indeholde passende tegninger, indførelse af betegnelser for de størrelser, der har betydning, samt opstilling af et matematisk udtryk for arealet.

Beskriv dernæst en fremgangsmåde til at beregne hønsegårdens dimensioner.

Gennemgå selv yderligere et eksempel, hvor hønsegården er trekantet, cirkulær eller har en helt anden form.

Opgave 2b
I kørelærerens teoribog tales om reaktionslængde og bremselængde. *Reaktionslængden* er det stykke en bil kører før føreren begynder at bremse. *Bremselængden* er det stykke en bil kører fra føreren begynder at bremse til bilen står stille.
Af teoribogen fremgår at *reaktionslængden* er 3 meter for hver 10 km/t man kører. Af samme teoribog fremgår, at *bremselængden* ved 30 km/t er ca. 6 meter, og at den øges voldsomt, når hastigheden forøges: Ved 2 gange så stor hastighed bliver bremselængden 4 gange så stor. Ved 3 gange så stor hastighed bliver bremselængden 9 gange så stor.

Der ønskes en matematisering af dette dvs. opstilling af matematiske udtryk for, hvorledes reaktionslængde og bremselængde afhænger af hastigheden v

Der ønskes dernæst en vurdering af, hvorledes den mindste afstand a mellem to kørende biler afhænger af farten v, når der tages hensyn til sikkerheden.

Endelig ønskes opstillet en trafikmodel over sammenhængen mellem det maksimale antal biler $N(v)$, der passerer et bestemt punkt og bilernes gennemsnitsfart v.
Det må gerne i opstillingen af modellen antages, at bilerne kører med samme fart v, at de holder samme faste indbyrdes afstand a og at alle bilerne er lige lange.

Opgave 2c
En kugle med radius r er placeret inde i en cylinder med låg og bund, så den netop rører siden, toppen og bunden. Vis at forholdet mellem cylinderrumfang og kuglerumfang er lig med forholdet mellem cylinderoverflade og kugleoverflade.

STUDENTEREKSAMEN MAJ-JUNI 2002 **2002-8-2**

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Onsdag den 15. maj 2002 kl. 9.00-13.10

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

Der tildeles i alt ca. 75 point

Opgave 2
(ca. 15 point)

I en trekant ABC er $a = 7.8$, $b = 8.5$ og $c = 6.9$.

Beregn vinkel C og trekantens areal.

Beregn længden af medianen m_a og længden af vinkelhalveringslinjen v_A.

Opgave 3
(ca. 15 point)

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$$

Bestem definitionsmængden for f.

Bestem monotoniforholdene for f.

Bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f.

Bestem værdimængden for f.

Opgave 4
(ca. 15 point)

For piloter er det af betydning at kunne bestemme lydens hastighed i luften uden for flyet. Hertil kan man anvende en omregner. Omregneren indstilles på lufttemperaturen uden for flyet, og derefter kan lydhastigheden aflæses på omregneren. Den følgende tabel viser sammenhørende værdier for luftens temperatur T (målt i kelvin) og lydens hastighed v (målt i knob).

Lufttemperatur T (målt i kelvin)	193	223	243	273	293	323
Lydhastighed v (målt i knob)	542	582	609	642	669	700

Sammenhængen mellem v og T kan med god tilnærmelse beskrives ved ligningen

$$v = b \cdot T^{a}.$$

Bestem konstanterne a og b.

Bestem den værdi af T, der svarer til en lydhastighed på 560 knob.

Bestem den procentvise ændring i v, når T bliver 30% større.

Opgave 5
(ca. 15 point)

I et koordinatsystem er en parabel $\mathcal{P}$ bestemt ved ligningen

$$y = x^2 - 8x + 15.$$

Beregn koordinatsættet til hvert af parablens skæringspunkter med førsteaksen, og beregn koordinatsættet til parablens toppunkt.

En familie af linjer l_a er bestemt ved ligningen

$$y = ax - (4a + 2).$$

Beregn afstanden fra parablens toppunkt til linjen l_3.

Bestem de værdier af a, for hvilke parablen $\mathcal{P}$ og linjen l_a har netop ét punkt fælles.

Opgave 6a
(ca. 15 point)

Til et eksperiment er der knyttet en stokastisk variabel X, der kan antage værdierne 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Der gælder, at $P(X=t) = \frac{t}{21}$.

Udfyld en tabel som nedenstående over sandsynlighedsfordelingen for X, og bestem middelværdi og spredning for X.

t	1	2	3	4	5	6
$P(X=t)$						

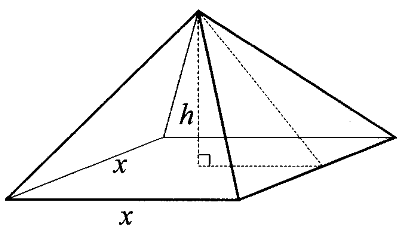
Bestem sandsynligheden for, at værdien af X er et lige tal.

Det omtalte eksperiment udføres 7 gange uafhængigt af hinanden.

Bestem sandsynligheden for, at netop 3 af disse udførelser resulterer i, at værdien af X er et lige tal.

Opgave 6b
(ca. 15 point)

Et telt skal have form som en pyramide bestående af en kvadratisk bund og fire sideflader. Sidefladerne er kongruente, ligebenede trekanter. Teltet skal rumme 6 m^3. Teltets overflade er arealet af de fire trekanter og den kvadratiske bund.



Rumfanget V af en pyramide med kvadratisk bund er givet ved formlen
$$V=\frac{1}{3}h\cdot x^2,$$
hvor h er pyramidens højde, og x er siden i pyramidens kvadratiske bund.

Bestem teltets højde h og arealet af en af sidefladerne, når siden i den kvadratiske bund er 3 m.

Teltets overflade O (målt i m^2) er en funktion af siden x (målt i m) i den kvadratiske bund.

Gør rede for, at funktionen O kan skrives som

$$O(x) = x^2 + \sqrt{x^4 + \frac{1296}{x^2}}\ .$$

Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af x, for hvilken $O(x)$ er mindst mulig, når $x \in [2;6]$.

Kun én af opgaverne 6a og 6b må afleveres til bedømmelse

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 2002 **2002-8-6**

ALLERØD
FORSØG

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN UDEN HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 15. august 2002 kl. 9.00-10.00

BESVARELSEN AFLEVERES KL. 10.00

Der tildeles i alt ca. 25 point

Opgave 1
(ca. 25 point)

a) En cirkel er bestemt ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 8y = 8.$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

b) En stokastisk variabel X kan antage værdierne –2, 0, 1 og 2.

Det oplyses, at

t	-2	0	1	2
$P(X = t)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

Bestem $P(X < 1)$ og $E(X)$

c) En funktion f er givet ved $f(x) = x \cdot \ln x$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(\mathrm{e}, f(\mathrm{e}))$.

d) Isolér v i nedenstående formel

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad 0 < v < c .$$

e) Om en differentiabel funktion f gælder følgende:

f har definitionsmængde $]-5;\infty[$

fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:

x	-5		-3		-1		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Angiv monotoniforhold for f, og angiv de lokale ekstremumssteder for f.

f) I tabellen ses nogle funktionsværdier for funktionen cos.

Radiantal	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Bestem i intervallet $[0\,;2\pi]$ samtlige løsninger til ligningen $\cos x = \frac{1}{2}$.

Bestem i intervallet $[0\,;2\pi]$ samtlige løsninger til uligheden $\cos x < \frac{1}{2}$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

STUDENTEREKSAMEN AUGUST-SEPTEMBER 2002

2002-8-6X
ALLERØD
FORSØG

MATEMATISK LINJE OG SPROGLIG LINJE
2-ÅRIGT FORLØB TIL B-NIVEAU

MATEMATIK

DELPRØVEN MED HJÆLPEMIDLER

Torsdag den 15. august 2002 kl. 10.00-14.10

I tidsrummet 10.20-10.45 kan man mødes i de aftalte grupper

Af opgaverne 1a, 1b og 1c skal kun to besvares
Af opgaverne 2a, 2b og 2c skal kun to besvares

Der tildeles i alt ca. 75 point
Alle opgaver tildeles ca. lige mange point

Opgave 1a. Hovedet på et snapsglas har form som en omvendt kegle.
Hvor højt skal snapsglasset skænkes for at være halvt fyldt?

Opgave 1b. To stykker papir rulles sammen til to rør af samme længde og således, at det ene rør lige præcis kan glide frem og tilbage indeni det andet. Herved har vi lavet et "teleskop". Når vi gør "teleskopet" længere eller kortere ændres synsvinklen for den person, der kigger gennem "teleskopet".
Modeller hvorledes synsvinklen ændrer sig, når vi således lader det indre rør glide frem og tilbage i det ydre rør.

Opgave 1c. Et stakit af en vis længde skal anvendes til at lave en lukket indhegning. Indhegningen skal have form som en trekant, hvor en mur udgør den ene side, og hvor de to andre sider er lavet ved hjælp af stakittet.
Hvordan skal stakittet deles, og hvordan skal de to sider med stakit anbringes, så indhegningens areal bliver så stort som muligt?

Opgave 2a. En beholder består af en cylinder med en halvkugle ovenpå. Beholderen skal konstrueres, så den får et bestemt rumfang. Hvilke dimensioner skal beholderen have for at minimere materialeforbruget?

Opgave 2b. En bestemt terning har et rumfang, der er k gange så stort som rumfanget af en anden given terning.
Hvad er forholdet mellem overfladearealerne på de to terninger?

Opgave 2c. Et ur med en stor minutviser og en lille timeviser går præcist. Klokken 12 passerer den store viser den lille.
Hvad er klokken næste gang det sker?

F Skriftlige opgavebesvarelser fra udvalgte elever

Det følgende er en anonymiseret men i øvrigt uredigeret gengivelse af nogle skriftlige opgavebesvarelser fra udvalgte elever som deltog i Allerød-forsøget (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik og indplacering af besvarelserne i det samlede undervisningsforløb). Det drejer sig i nævnte rækkefølge om en projektrapport fra henholdsvis andet og femte projektforløb og tre besvarelser af det i appendiks E gengivne opgavesæt fra den afsluttende skriftlige eksamen med hjælpemidler i august 2002.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Matematikrapport d. 22/11-00

Konservesdåsens optimale form

Denne matematikrapport har overemnet modellering. Vi diskuterede mange forskellige emner igennem i gruppen og endte med "Konservesdåsens optimale form." Vores rapport vil indeholde beskrivelser og kommentarer af fordele og ulemper ved forskellige former på dåser, både med henblik på rumindhold, emballageforbrug, transport og opbevaring.

Følgende spørgsmål fandt vi spændende og interessante, og de vil derfor være grundlæggende i vores rapport:

- Hvorfor vælges cylinderformede dåser?
- Hvilke fordele og ulemper har de forskellige dåsers form?
- Hvilken type dåse vil være mest emballagebesparende?
- Hvilken dåseform vil være den mest praktiske at transportere, hvis man ser bort fra emballageforbruget?

Til besvarelse af de ovennævnte spørgsmål, får vi brug for de nøjagtige mål på en dåse med flåede tomater. Derudover skal vi i forbindelse med transportberegningerne vide, hvilke mål en europalle har, og kende de gennemsnitlige mål på en lastbil. Vi kontaktede nogle forskellige firmaer og fik følgende oplysninger:

Tomatdåse:	diameter = 7,2 cm	højde = 10,3 cm	
Europalle:	længde = 120 cm	bredde = 80 cm	højde = 14,5 cm
Lastbil:	længde = 1370 cm	bredde = 248 cm	højde = 280 cm

I vores rapport vil vi anvende rumfangs- og arealberegninger. Vi vil også komme ind på 2.gradsligninger. Vi regner med at finde flest fordele ved de cylinderformede dåser, da det er dem der hyppigst forekommer i forretningerne. Dette er dog kun en hypotese, som vi håber at kunne af- eller bekræfte ud fra vores beregninger og konklusioner.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Udregning 1:

I denne udregning har vi taget udgangspunkt i den købte tomatdåse, der er cylinderformet. Vi skal både beregne rumfanget og overfladearealet.

Rumfang:	$r^2 * \pi * h \Rightarrow (3{,}6^2 * \pi * 10{,}3)cm^3$	$= \underline{419{,}36\ cm^3}$
Overfladeareal:		
Den krumme overflade:	$2 * \pi * r * h \Rightarrow (2 * \pi * 3{,}6 * 10{,}3)cm^2$	$= 232{,}86\ cm^2$
Enderne:	$(\pi * r^2) * 2 \Rightarrow ((\pi * 3{,}6^2) * 2)cm^2$	$= 81{,}43\ cm^2$
Overfladeareal i alt:	$(232{,}86 + 81{,}43)\ cm^2$	$= \underline{314{,}29\ cm^2}$

Vi vil nu beregne det mindste overfladeareal, for en cylinderformet dåse, med fast rumfang. Formlen som før blev brugt til beregning af overfladen, bruges igen:

$$2 * \pi * r * h + (\pi * r^2) * 2$$

For at gøre ligningen lettere at løse, sættes

$$r = \sqrt{(419{,}36/\pi/h)}$$

Ligningen med "det nye r" bliver: $h * \sqrt{(419{,}36/\pi/h)} * 2 * \pi + \pi * \sqrt{(419{,}36/\pi/h)} * 2$

Denne ligning indtastede vi ind på lommeregneren, tegnede grafen og fandt minimum. Det gjorde vi ved at trykke:

- 2nd
- TRACE
- minimum
- ENTER
- angive en venstre graf (GRÆNSE)

N 1.x

Matematikrapport nr.2 d.22/11-00

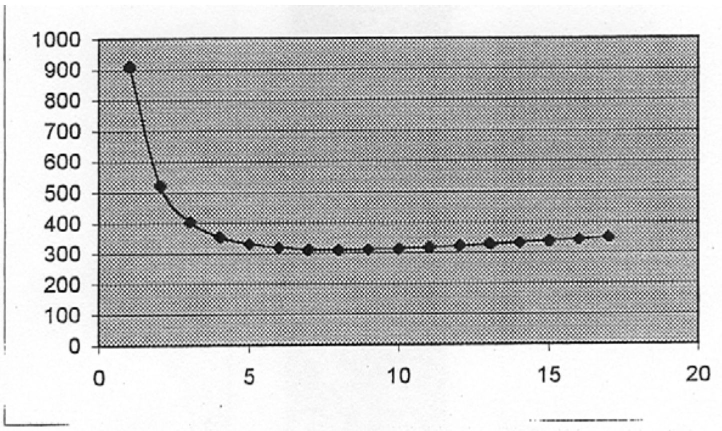
Gruppe: J, D, AS, L og N

- ENTER
- angive en højre graf
- ENTER
- angive et gæt
- ENTER
- Afvente indtil lommeregneren har fundet minimum

På denne måde kom vi frem til følgende resultatet:

Det mindste overfladeareal = 310,2 cm^2.

Opnås med en højde på = 8,11 cm.



Grafen fra lommeregneren tegnede vi også på computeren, det er nu muligt at aflæse minimum.

Vi finder nu r, ved at indsætte de fundne tal i den ovenstående ligningen for r:

$$r = \sqrt{(419{,}36/\pi/h)}$$

Vi kan nu beregne at r = 4,057 cm

Det vil sige at diameteren = 8,11 cm

Diameteren er altså den samme som den fundne højden, når overfladearealet skal være mindst muligt.

Udfra beregningerne ses altså, at det ikke er den mest emballagebesparende dåseform, der er valgt af forretningen.

Udregning 2:

Udregning 2a:

Den optimale højde på en cylinderformet dåse i forhold til det mindst mulige emballageforbrug er fundet. Vi finder nu det mindst mulige for en firkantet dåse, så de to tal kan sammenlignes.

Vi opstiller en tabel, så vi får et bedre overblik over hvor tallene ligger imellem, når det mindst mulige overfladeareal ønskes.

Nr.	Firkantens ene side (x) i cm.	Firkantens anden side (y) i cm.	Højden i cm. (beregnet)	Overfladeareal i cm^2 (beregnet)	Rumfang i cm^3
1	7,2	7,2	8,09	336,672	419,36
2	4	4	26,21	451,36	419,36
3	9	9	5,177	348,372	419,36
4	11	5	7,62	353,84	419,36
5	10,5	8	4,99	352,63	419,36
6	7	5	11,98	357,52	419,36
7	3	7	19,97	441,4	419,36
8	15	10	2,8	440	419,36
9	6,2	6,2	10,9	347,2	419,36
10	8,2	8,2	6,24	399,15	419,36

Både x og y er bestemt fra start af. Vi har lavet nogle forskellige kombinationer, nogle tilfælde hvor x og y er lige store, nogle hvor forskellen er stor og nogle hvor den er lille.
Det faste rumfang har vi fra dåsen med flåede tomater.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Højden beregnes ved at sige:	419,36 / (x * y)	
Eksempel række 4:	(419,36 / (11 * 5))cm	= 7,62 cm
Overfladeareal beregnes ved at sige:	højden * x * 2 + y * højden * 2 + x * y * 2	
Eksempel række 4:	((11 * 5) * 2 + (11 * 7,62) * 2 + (5 * 7,62) * 2) cm^2	= 353,84 cm^2

Vi vil nu finde de optimale mål, hvis emballageforbruget skal være mindst muligt. Rumfanget sættes fast, nemlig til de 419,36 cm^3 fra tomatdåsen fra før.

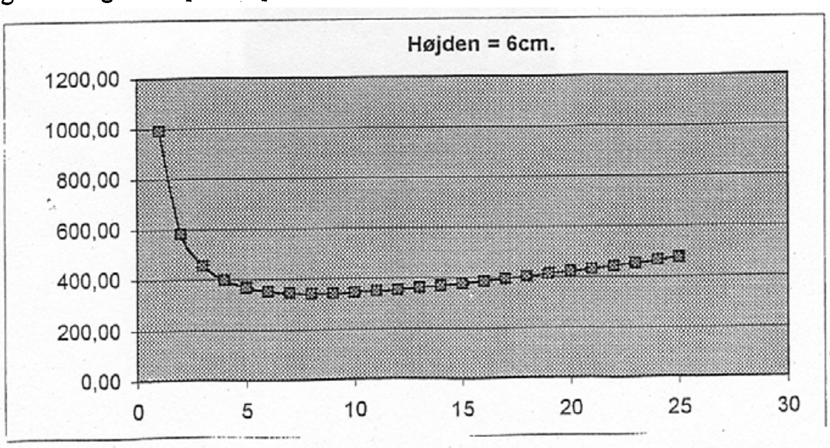
Ligningen fra før buges: h * x * 2 + y * h * 2 + x * y * 2 = 419,36

Da en ligning med 3 ubekendte ikke er sådan lige til at løse
omregnes y til: 419,36/(x * h)
sættes h henholdsvis til: 6 cm, 7 cm og 8 cm.

Når højden sættes til 6 cm, bliver formlen altså:

6 * x * 2 + 419,36/(x * 6) * 6 * 2 + x * 419,36/(x * 6) * 2 ⇒
12x + 419,36/x * 2 + 419,36/3

Ligningen indtastes på lommeregneren, og på samme måde som før findes minimum.
Grafen tegnede vi igen ind på computeren.



N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Vi finder den mindste overflade og sidelængden på dåsen ,ved højden 6 cm.

Overfladearealet = <u>340,42 cm²</u>

Sidelængden (x) = <u>8,36 cm.</u>

Vi finder den sidste sidelængde (y), ved at indsætte de fundne tal, i formlen for y:

$$y = 419{,}36/(x * h) \Rightarrow$$
$$y = 419{,}36/(8{,}36 * 6) \Rightarrow$$
$$y = 8{,}36$$

Sidelængderne x og y bliver altså lige store, når højden og rumfanget er fast, og når det mindst mulige overfladeareal vil findes.

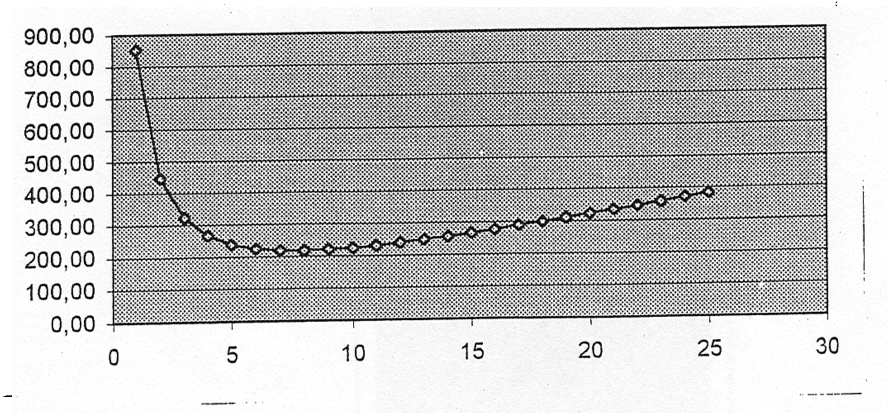
Udregning 2b

I stedet for at bestemme højden, bestemmer vi nu sidelængden x til 7cm.

Formlen bliver nu i stedet:

$$7 * h * 2 + 419{,}36/(7 * h) * 7 * 2 + h * 419{,}36/(7 * h) * 2 \Rightarrow$$
$$14h + 419{,}36/h * 2 + 419{,}36/3{,}5$$

Ligningen indtastes igen på lommeregneren, og minimum findes.



Her er grafen, når sidelængden x bestemmes til 7 cm.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Vi finder den mindst mulige overflade og højde, når sidelængden x er 7cm.

Overfladearealet = 336,54 cm^2

Højden = 7,74cm.

Den sidste sidelængde (y) findes på samme måde som før:

$y = 419{,}36/(x * h) \Rightarrow$

$y = 419{,}36/(7 * 7{,}74) \Rightarrow$

$y = 7{,}74$

Udfra udregningen ses at de to resterende sider igen er lige store.

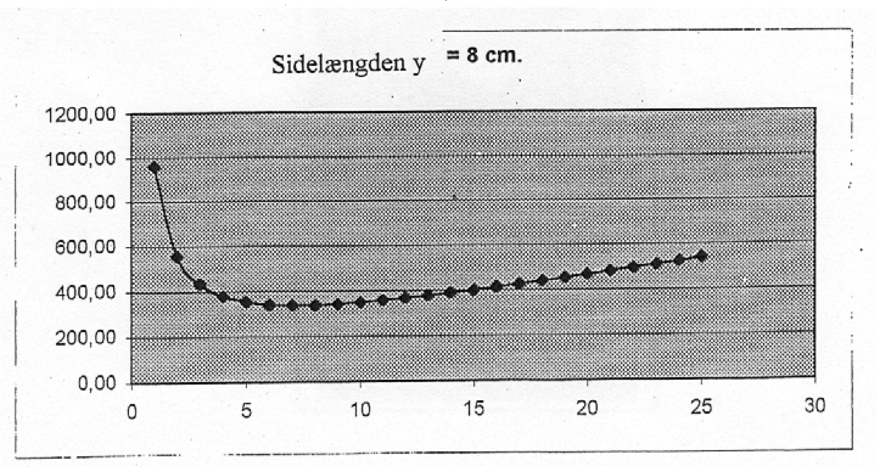
Udregning 2c:

Til sidst sættes sidelængden y til 8 cm. Tallene indsættes i samme formel, dog selvfølgelig med de nødvendige justeringer. Dengang bliver formlen:

$8 * h * 2 + 8 * 419{,}36/(8 * h) * 2 + 419{,}36/(8 * h) * h * 2 \Rightarrow$

$16h + 419{,}36/h * 2 + 419{,}36/4$

Denne graf tegnede vi også på computeren.



N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Ligningen indtastes igen på lommeregneren, og minimum beregnes som før.

Når sidelængden y er 8cm, ses fra grafen at det mindst:

Overfladeareal = 336,53

Sidelængden (x) = 7,24 cm

Igen bruges den samme ligning som før, til at finde højden i dåsen:

$$h = 419{,}36/(x * y) \Rightarrow$$
$$h = 419{,}36/(7{,}24 * 8) \Rightarrow$$
$$h = 7{,}24$$

Igen ser vi at resultatet bliver at de to resterende sider bliver lige lange, når det mindste overfladeareal skal findes. Det er lige meget om det er x, y eller h der er angivet fra start.

Vi kan opsætte følgende:

Når h er konstant er x = y
Når x er konstant er y = h
Når y er konstant er h = x

Dette er også gældende hvis konstanten sættes til det samme i de tre eksempler. Når x og y er det samme, når h er konstant, og konstanterne h og x er det samme, betyder det ikke kun at x = y og y = h. Vi kan nemlig nu skrive at x = y = h.

Dette må betyde at hvis alle tre sider er lige lange opnås det mindst mulige overfladeareal. Dåsen skal altså være kubisk. Den samme tendens kunne man også se i den første udregning, med den cylinderformede dåse, hvor diameteren og højden var lige lange. Det rigtige tal finder man ved at sige:

$$\sqrt[3]{419{,}36\text{cm}^3} = 7{,}5\text{cm}$$

Det minimale overfladeareal
for en firkantet dåse, bliver altså: $((7{,}5 * 7{,}5) * 6)\ \text{cm}^3$ = $\underline{337{,}5\ \text{cm}^3}$

Udregning 3:

Udregning 3a:

I denne udregning vil vi se mere på formen i forhold til at stable og transportere. Det er jo ikke sikkert, at den dåseform, der var den bedste løsning i udregning 1 og 2, er det i denne udregning, hvor vi ser helt bort fra emballageforbrug. Nu skal vi bruge resten af måleresultaterne fra indledningen.

Lastbil:	længde = 1370cm	bredde = 248cm	højde = 280cm
Europalle:	længde = 120cm	bredde = 80cm	højde = 14,5cm

Først beregnes antallet af paller i lastbilen, når pallens længde støder op mod lastbilens længde, og når pallens bredde ligeledes støder op mod lastbilens bredden:

Længde mod længde	(1370 / 120)	= 11
Bredde mod bredde	(248 / 80)	= 3
I alt kan der stå	(11 * 3) paller	= 33 paller

Men pallerne kan også stå på en anden måde i lastbilen, nemlig med pallens længde mod lastbilens bredde, og pallens bredde mod lastbilens længde. Og så bliver antallet af paller i lastbilen anderledes:

Pallens længde mod bilens bredde	(1370 / 80)	= 17
Pallens bredde mod bilens længde	(248 / 120)	= 2
I alt kan der stå	(17 * 2) paller	= 34 paller

Vi antager, at dette kan lade sig gøre rent teknisk, og vælger derfor den sidste løsning, da denne giver et større antal paller pr. lastbil, og det derfor vil være et sandsynligt valg set fra firmaernes side.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Udregning 3b:

Først ser vi på transportudregningerne i forhold til målene på "forretningsdåsens."

Antal "forretningsdåser" på en palle:

Hen ad pallens længde	(120 / 7,2)	= 16
På pallens bredde	(80 / 7,2)	= 11
I alt kan der stå	(16 * 11) dåser	= 176 dåser
Antal dåser i lastbilens højde	(280 – 14,5) / 10,3	= 25 lag
I alt kan der på en palle stå	(25 * 176) dåser	= 4.400 dåser
Antal "forretningsdåser" i lastbilen	(4400 * 34) dåser	= <u>149.600 dåser</u>

Denne udregning er set udfra, at dåserne ingen yderlig indpakning har. Der er ikke taget direkte højde for yderlig emballage i udregningerne, med da dåserne ikke går helt op til lastbilens tag, og da emballagen rundt om dåserne er rimelig tynd, kan dåserne stadig stå i lastbilen. Resultatet er derfor rimelig sandsynligt. Især fordi der i udregningerne er taget højde for europallens egen højde.

Udregning 3c:

Med samme udgangspunkt som før, beregnes nu antallet af den fundne optimale cylinderformet dåse i en lastbil.

Antal beregnet cylinderformede dåser på en palle:

Hen ad pallens længde	(120/8,11)	= 14
Hen ad pallens bredde	(80/8,11)	= 9
I alt kan der stå	(14 * 9) * 1 dåse	= 126 dåser
Antal dåser i lastbilens højde	(280 – 14,5) / 8,11	= 32 lag
I alt kan der på en palle stå	(32 * 126) * 1 dåse	= 4032 dåser

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Antal af den optimale cylinderformede dåse i hele lastbilen

	(4032 * 34) * 1 dåse	= <u>137088 dåser</u>

Udregningen fortæller os at selvom denne dåse havde de optimale mål med hensyn til mindst muligt emballageforbrug, er det ikke den optimale dåseform at transportere. Som det ses udfra udregning 3b og 3c, kan der nemlig være flere "forretningsdåser" i lastbilen.

Udregning 3d:
Igen med samme udgangspunkt som før, beregnes til sidst antallet af den fundne optimale firkantede formede dåser i en lastbil.
Antal firkantede dåser på en palle:

Hen ad pallens længde	(120/7,48) * 1 dåse	= 16 dåser
Hen ad pallens bredde	(80/7,48) * 1 dåse	= 10 dåser
I alt kan der stå	(10 * 16) * 1 dåse	= 160 dåser
Antal dåser i lastbilens højde	(280 – 14,5) / 7,48	= 35
I alt kan der på en palle stå	(160 * 35) * 1 dåse	= 5600 dåser
Antal firkantede dåser i hele lastbilen	(5600 * 34) * 1 dåse	= <u>190400 dåser</u>

Som ventet ses at der kan være klart flest firkantede dåser, da der jo ikke er noget spildplads mellem dåserne. Der kan være omkring 50.000 flere dåser på denne måde.

N 1.x
Matematikrapport nr.2 d.22/11-00
Gruppe: J, D, AS, L og N

Konklusion:

Efter at have arbejdet med vores rapport, har vi fået svar på nogle af de spørgsmål vi stillede os selv, inden vi gik i gang. Vi spurgte for eksempel, hvorfor den cylinderformede dåse vælges af forretningerne. I starten troede vi, at det var på grund af emballageforbruget, så dåsen var billigere at fremstille, men i udregning 1 viste det sig, at dette ikke var tilfældet. De mål vi beregnede os frem til som mål på den optimale cylinderformede dåse, når det mindst mulige overfladeareal var ønsket, var ikke "forretningsdåsens" mål. Den nye dåse ville derfor på grund af det mindre overfladeareal være billigere at fremstille.

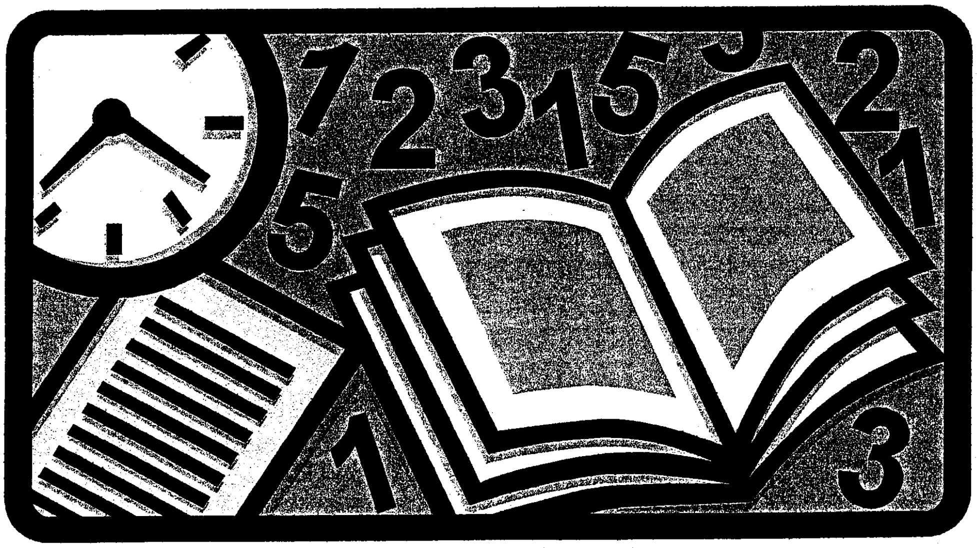
Det ville nu være logisk at tro, at "forretningsdåsen" var valgt udfra transporten. Det var dog ikke overraskende, da det viste sig, at det var den firkantede dåse, der var mest praktisk med hensyn til transport. Med de firkantede dåser forekommer der ingen spildplads under transporten, de kan på grund af hjørnerne stå helt op af hinanden, og på denne måde udnyttes al pladsen i lastbilen. Men hvorfor har "forretningsdåsen" så de mål den har????

Vi må konkludere at forretningen faktisk har været rimelig smarte, og sikkert tænkt en hel del over målene til dåsen. Havde de kun tænkt på transporten, og derfor valgt den firkantede dåse, havde de samtidig valgt den dåse der var dyrest at fremstille. Havde de derimod udelukkende tænkt på at vælge den dåse der var billigst at fremstille, ville den samtidig være den dyreste at transportere. Vi tror derfor at forretningen har valgt den dåse der er billigst når både transport og emballage tages i betragtning.

N

Energi – Trapper, Rulletrapper og Elevatorer

Matematik rapport



24. maj 2001

1. x

Lavet af: E, B, L og C

Indholdsfortegnelse.

Energiforbrug - trappe, rulletrappe & elevator.

Vi vil i vores undersøge følgende:

- Hvor meget energi forbruges der i gennemsnit på at flytte x -antal personer fra en etage til en anden med: Trappe, rulletrappe og elevator.
- Hvad er forskellen og hvad kan bedst betale sig.

Kigger man i dag på transportmidlerne i stormagasinerne benyttes der både rulletrapper, elevator og almindelige trapper. Ofte vælger man den løsning, der er mest hensigtsmæssig i den givne situation. Har man f.eks. barnevogn med vil elevatoren være det oplagte valg, mens rulletrappen mere er en bekvemt løsning for at komme en etage op. Trappens egnethed varierer fra person til person. Her skal man bemærke, at det er en selv, der skal levere energien; altså vil en ældre dame sandsynligvis komme hurtigere op ved at benytte enten elevator eller rulletrappe, mens en yngre person der har travlt vil kunne komme hurtigere op, ved at benytte trappen, da han/hun selv kan bestemme farten.

Vi vil i opgaven se nærmere på den energi, der forbruges når personer bevæger sig fra en etage til en anden og hvordan energiforbruget pr. person ændrer sig jo flere der benytter det givne transportmiddel.
Da forudsætningerne for de forskellige beregninger varierer, vil hvert underafsnit indledes med at de aktuelle forudsætninger nævnes. Dog har vi som fælles forudsætning valgt at personen skal transporteres fem meter op, og ved trappen og rulletrappen sætter vi længden til ti meter.

Opgaven er delt ind i tre "afsnit": Trapper, rulletrapper og elevator. I hver del vil vi beregne energiforbruget for den pågældende transportform, for så til sidst at sammenligne de tre resultater, og kommentere hvad vi mener bedst kan betale sig og i hvilke situationer.

For at illustrere vores udregninger vil vi benytte grafer, hvilket også gør det nemmere at sammenligne de tre transportformer med hinanden. Desuden vil vi ved rulletrappen opstille en ligning.

Trappen.

Forudsætninger:

- At personerne i gennemsnit vejer 70 kg.
- At højden fra startniveauet er 5 meter.

For at beregne energiforbruget pr. person beregnes den potentielle energi ved hjælp af følgende formel:

$E_{pot} = m * g * h$

m = massen i kg

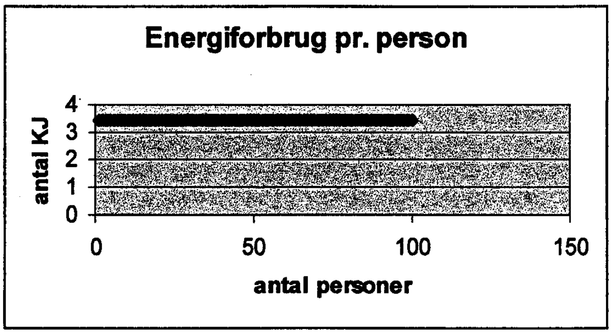
g = tyngdeacceleration (9,82N/kg)

h = højden i meter

Vi beregner nu hvor meget energi vores gennemsnits person bruger på at bevæge sig de fem meter fra en etage til en anden.

E_{pot}: 70 kg. * 9,82 N/kg. * 5 m. = 3473 J = 3,473 KJ.

Energiforbruget vil pr. person være konstant uanset antallet af mennesker, hvilket ses på grafen nedenfor.

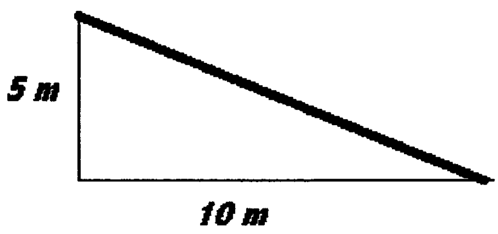


Rulletrappen:

Forudsætninger:

- At rulletrappen kun kører når der er mennesker på trappen.
- At der påstiger én person hvert sekund.

Vi ved på forhånd at rulletrappen kører 0,5 m pr. sek., og at den bruger 6,9 kw pr. sek. For nu at kunne beregne den energi rulletrappen benytter, må vi kende dens længde. Til dette benytter vi phytagorassætning: $a^2 + b^2 = c^2$



Udregning af rulletrappens længde: $5 \text{ m.}^2 + 10 \text{ m.}^2 = 125 \text{ m}$

Altså er c^2 lig med 125 meter. Rulletrappens længde er så: $\sqrt{125} = 11{,}2 \text{ m}$

Vi beregner nu hvor mange sek. det tager at komme en etage op: $\frac{11{,}2 \text{ m.}}{0{,}5 \text{ m./sek}} = 22{,}4 \text{ sek.}$

Nu beregnes den energi det kræver for rulletrappen at køre i de 22,4 sek.:

$$22{,}4 \text{ sek.} * 6{,}9\text{KW} = 154{,}56 \text{ KJ}$$

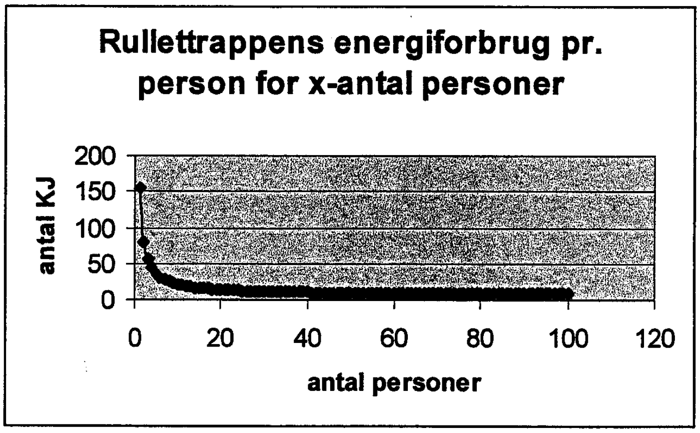
(Watt er lig J/sek.)

Er der kun en person på rulletrappen benytter denne person al energien, altså 154,56 KJ. til at komme de fem meter op.

Hvis der derimod er flere personer der benytter rulletrappen samtidig, vil rulletrappens energi fordeles på disse. Altså vil hver enkelts forbrug af energi falde, desto flere der kommer på. For at beregne den gennemsnitlige energi pr. person opstiller følgende ligning:

Energiforbrug pr. person: $\frac{6,9 \text{ KW.} * (x - 1) + 154,56 \text{ KJ.}}{x}$ x = antal personer.

Ligningen kan forklares på følgende måde:
Hver gang der stiger en ny person på rulletrappen bruger den 6,9 KW. Det er denne energi rulletrappen bruger pr. sek. og vi har forudsat at personerne stiger på med et sekunds mellemrum. Altså ganges antallet af mennesker minus én med KW. Idet den sidste person stiger på ved vi at det tager 22,4 sek. at transportere personen en etage op, hvilket som sagt kræver 154,56 KJ, som derfor lægges til den energi rulletrappen bruger pr. sek.
Til sidst divideres der med antallet af personer. Vi kan nu beregne hvor meget energi det kræver pr. person at transportere x -antal mennesker 5 meter op.



Som det ses falder energiforbruget pr. person jo flere mennesker der benytter rulletrappen.

Elevatoren:

Forudsætninger:

- At der højst kan være otte mennesker i elevatoren pr. tur.
- At elevatoren skal ned igen for at hente et nyt antal personer. Denne ekstra energi medregnes også selvom det kun er fire personer der skal transporteres.

Vi ved at elevatoren bruger 11 KW i sekundet, kører med en hastighed på 0,6 m/sek. og der er 5m fra 1-2 sal.

Altså kan vi beregne hvor mange sek. en tur op el. ned tager:

$$\frac{5\text{m}}{0{,}6\text{ m/sek.}} = 8.333 \text{ sekunder fra 1-2 sal.}$$

Vi ved nu hvor mange sekunder turen tager og hvor mange KJ elevatoren bruger i sekundet (KW = KJ/sek.). Det samlede energiforbrug beregnes:

8,333 sekunder * 11 KW pr. sekund. = 91,5 KJ

Da elevatoren skal både op og ned, hver gang den kører en tur forbruges der: 91,5 KJ * 2 = 183 KJ.

Vi opstiller nu et skema hvor energiforbruget pr. person ses.

Antal Personer	1	2	3	4	5	6	7	8
KJ/pers.	183,00	91,50	60,00	47,75	36,60	30,50	26,14	22,88

Uanset hvor mange personer fra 1-8, som kører op med elevatoren, vil det koste 183 KJ, men jo flere der kører med desto mindre energi bliver der brugt pr. person. Det gennemsnitlige energiforbrug beregnes således: 183 KJ / x - personer.

Eks. 7 pers.: 183 KJ / 7 pers. = 26,14 KJ pr. person.

Efter de første otte personer er blevet transporteret op, må elevatoren tage turen ned for at hente de næste mennesker, da der ikke kan være flere end otte personer i elevatoren. Altså lægges der det antal KJ elevatoren bruger på en tur til. Det gennemsnitlige energiforbrug beregnes således:

Eks. 9 pers.: (2*183 KJ) / 9 pers. = 40,67 KJ pr. person.

Energiforbruget pr. person 9 – 16 bliver derfor:

Antal Personer	9	10	11	12	13	14	15	16
KJ/pers.	40,67	36,60	33,27	30,50	28,15	26,14	24,40	22,88

Uanset hvor mange personer fra 9-16, som kører op med elevatoren, vil det koste 366 KJ (183 *2), da elevatoren skal køre to gange for at få transporteret personerne op, men jo flere der kører med desto mindre energi bliver der brugt pr. person.

Og sådan fortsætter man med at beregne energiforbruget pr. person.

Antal Personer	17	18	19	20	21	22	23	24
KJ/pers.	32,29	30,50	28,90	27,45	26,14	25,00	23,87	30,50

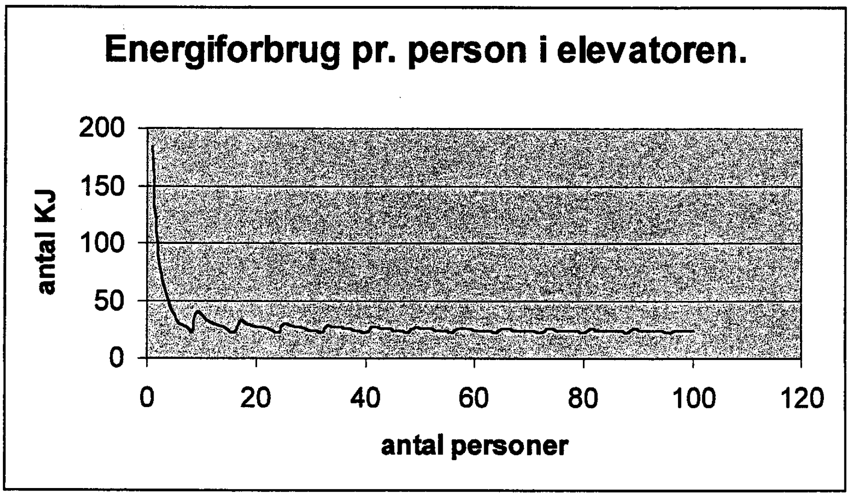
Antal Personer	25
KJ/pers.	29,28

Sådan fortsættes udregningerne.

Hvis vi antager, at der er 100 personer, som skal fra 1-2 sal, skal elevatoren køre; $\frac{100}{8}$ = 13 gange.

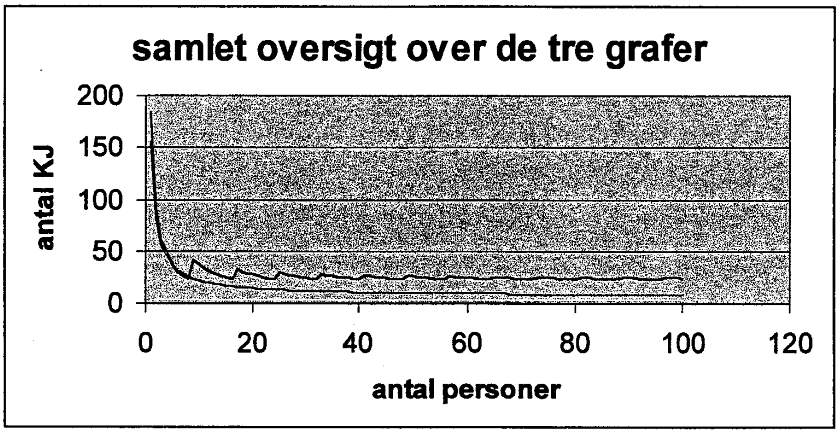
13 * 183 = 2379 KJ ⇒ $\frac{2379\ KJ}{100}$ = **23,79 KJ pr. person.**

Grafen kommer til at se således ud:



Udsvingene på kurven skyldes, at elevatoren kun kan transportere 8 personer op ad gangen, hvorefter den skal ned igen, for at hente 8 nye personer osv. At stigningerne bliver mindre og mindre synlige skyldes, at energien bliver fordelt på et større antal personer.

Sammenligning af de tre grafer.



Blå = Elevator Rød = Rulletrappe Gul = Trappe

Når de tre grafer indtegnes i samme koordinatsystem ser det ud som ovenstående. Vi kan altså se, at elevatoren og rulletrappen falder nogenlunde lige meget, ved de første antal mennesker, men omkring 10 pers. bruges der klart mindre energi pr. person ved rulletrappen. Der bruges klart mindst energi hvis personen selv går op af en almindelig trappe.

Konklusion.

Hvis vi kun kigger på kurverne med henblik på energiforbruget, må man klart sige at den almindelige trappe er at foretrække, specielt fordi det er menneskelig energi der bruges. Grunden til at man så alligevel benytter elevatorer og rulletrapper så mange steder skal altså findes andre steder. Det må siges at være mere bekvemt at kunne tage elevatoren til tredje sal end at skulle gå de mange trin. Man kan jo også tænke sig, at kunderne vil være mere motiverede for at købe butikkernes

varer, hvis de har haft mulighed for, at slappe af på vej op ad rulletrappen. På den måde kan man vel også sige at stormagasinerne får tjent de penge ind der bruges på transportmidlerne, ved at kunden er mere oplagt. Altså ren og skær service.
Vi må umiddelbart konkludere, at der skal en del mennesker til, før at det kan betale sig at instalere en rulletrappe. Udfra vores graf kan man se, at der i gennemsnit helst skal komme en person i sekundet, for at det kan betale sig. Vi satte i vores opgave som kriterium, at rulletrappen stod stille når den ikke blev benyttet, hvilket sjældent forekommer i virkeligheden. Derfor er det endnu vigtigere, at rulletrappen benyttes løbende af et vist antal mennesker, da energitabet ellers vil være voldsomt.
Her må elevatoren siges, at være mere energibesparende, da den kun forbruger energi, når den benyttes. Dog er elevatoren meget energikrævende og det er sjældent, at otte mennesker skal op på samme tid.
Samtidig vil elevatoren ikke være en særlig god løsning hvis der er tale om en løbende strøm af mennesker, da der vil blive megen ventetid. Alligevel er elevatoren nødvendig for f.eks. handicappede og småbørnsfamilier.

Vores samlede konklusion er, at det er meget forskelligt hvad der bedst kan betale sig, at vælge af de tre transportformer. Men kigger vi kun på det energimæssigt, vil den almindelige trappe altid bedst kunne betale sig.

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen:		Fag/niveau: Mat	Dato: 15/8 - 2002
E		Klasse/hold: 3.x	Nr.: 24
Ark nr.: 1	Antal ark i alt: 4	Tilsynsførendes sign.:	HK

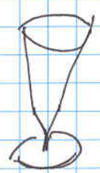
Lyreco

OPG. 12

Hovedet på et snapseglas har form som en omvendt kegle. Hvor højt skal snapseglasset skænkes for at være halvt fyldt?

Rumfanget i en kegle $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Det antages at glassets $r = 2$ cm og at $h = 6$ cm



dvs.

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 6$

$V = 25,13$ cm^3

Da kun haludelen af V skal bruges divideres m. 2: $\frac{25,13}{2} = 12,565$ cm^3

da V nu kendes omskrives formlen så h findes $=$ $h = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2}{V}$

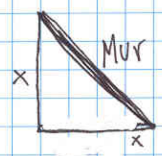
Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen:		Fag/niveau: Mat	Dato: 15/8 - 2002
E		Klasse/hold: 3.X	Nr.: 24
Ark nr.: 2	Antal ark i alt: 4	Tilsynsførendes sign.:	

Lyreco

OPG 1.c

Et stakit af en vis længde skal anvendes til at lave en indhegning. Indhegningen skal have form som en trekant, hvor en mur udgør den ene side .....

Jeg antager at vi har at gøre med en retvinklet trekant og at vi har et samlet længde stakit på 120 m.



$\left(a = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g\right)$

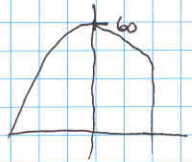
dvs. $a = \frac{1}{2} \cdot 120 - x \cdot x$

$\Rightarrow 60 - \frac{1}{2} x \cdot x$

$\Rightarrow 60 - \frac{1}{2} x^2$

indtegnet på graf giver dette en parabel m. toppunkt i 60 dvs. begge sider skal være 60 m.

(skitse af graf)



Murens lengde er derfor

$60^2 + 60^2 = c_{mur}^2$ $\qquad (a^2 + b^2 = c^2)$

$60^2 + 60^2 = 7200$

$\sqrt{7200} = c_{mur}$

$c_{mur} = 84,85$ meter

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen:		Fag/niveau: Mat	Dato: 15/8-2002
E		Klasse/hold: 3.X	Nr.: 24
Ark nr.: 3	Antal ark i alt: 4	Tilsynsførendes sign.:	

Lyreco

OPG 2B

En bestemt terning har et rumfang, der er k gange så stort som rumfanget af den anden terning. Hvad er forholdet mellem overflade arealerne.

Da formlen for overflade ($O = h \cdot g$) og for rumfang ($V = h \cdot g \cdot b$) i princippet er ens (foruden b) og da terningens sider er lige lange vil forskellen k være:

$$\frac{(x^3 \cdot k)}{x^3} \quad \text{for rumfanget}$$

og $$\frac{(x^2 \cdot k)}{x^2} \quad \text{for overfladen}$$

derfor vil forholdet være $\underline{\underline{\frac{x^2 \cdot k}{x^2}}}$

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen:		Fag/niveau: Mat	Dato: 15/8-2002
E		Klasse/hold: 3. X	Nr.: 24
Ark nr.: 4	Antal ark i alt: 4	Tilsynsførendes sign.:	

Lyreco

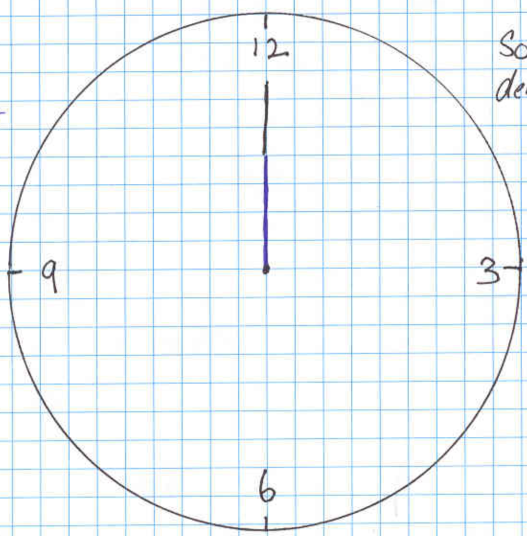
OPG. 2c

Et ur med en stor minutviser og en lille timeviser går præcist klokken 12. passerer den store viser den lille. Hvad er klokken næste gang det sker?

- Uret kl. 12 ser således ud:

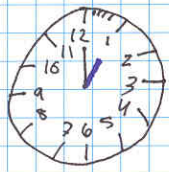
blå viser = den lille viser

Sort viser = den store viser



Idet den store viser (minut viser) er 60 min om at køre en omgang (1 time)

Bruger den lille viser 5 minut felter (se tegning) på ligeledes 1 time:



For hvert minutfelt den lille viser rykker går der 12 min og da den lille viser efter en time står på 1 skal der minimum 5 ekstra minuter til dvs. 65 min men da den lille viser rykker $\frac{1}{12}$ felt pr. minut vil den når den store viser er på 1 have rykket sig $\frac{5}{12}$:

Lille	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$
Stor	1	2	3	4	5	6	7

(Lille angive bevægelse i minutfelter)
(Stor angiver min)

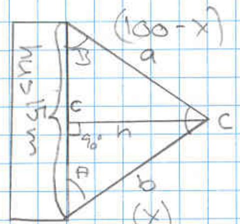
Når den store viser er på 6 min over vil den altså have passeret da den lille kun har haft rykket $\frac{1}{2}$ felt (kl. 13.06 er viser altså passeret for et halvt felt siden) Da feltet (viseren) er passeret for et halvt felt siden og ikke er passeret kl. 13.05 er de passeret i tiden $13.05\frac{1}{2}$

tiden 1 time 5 min og 30 sek.
er altså den tid det tager for de
2 viserer passerer hinanden

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen: Mat studentereksamen		Fag/niveau: Mat / obl	Dato: 15/8-2007
L		Klasse/hold: 2x (nu 3x)	Nr.: 28
Ark nr.: 1	Antal ark i alt: 1	Tilsynsførendes sign.: KB	

Opg 1c

For at løse opgaven sættes husets længde til 15 m og hegnets længde til 100 m.



Opgaven er umiddelbart nemt løst hvis stakittet deles så hver side er 50 m. Så kan højden (h) nemlig beregnes vha. phytagoras $\left(\left(c = \frac{15}{2}\right) \quad \sqrt{50^2 - 7{,}5^2} = h\right)$

Men lige så snart vi ændrer på stakit-længden kan man ikke umiddelbart vide hvor stor h er da man så kun kender en side (a el. b) (c er jo 15 men h ligger ikke længere "midt på h" da trekanten ikke er ligebenet længere)

Derfor benyttes cosinusrelationen: (x = stakitlængde i den ene side)

$$\cos(A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad A = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + 15^2 - (100-x)^2}{2 \cdot x \cdot 15}\right)$$

Når man så kender A benyttes sinusrelationen

$$\frac{h}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(90°)}$$

nu kender man så h og kan beregne arealet: $h \cdot 15 \cdot \frac{1}{2}$

Samler man beregningerne bliver udtrykket:

$$15 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(x \cdot \left(\sin\left(\cos^{-1} \cdot \left(\frac{x^2 + 15^2 - (100-x)^2}{2x \cdot 15}\right)\right)\right)\right)$$

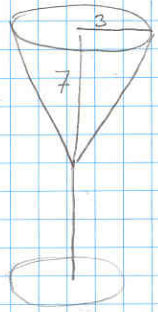
sin(90°) udgår da det giver 1

ved at forsøge med forskellige længder stakit er jeg nået frem til at det største areal opnås når stakittet skæres over på midten

Det opnåede areal bliver så i mit tilfælde:

$$15 \cdot \left(\sqrt{50^2 - 7{,}5^2}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad = \quad 370{,}76 \text{ m}^2$$

1a



keglens rumfang: $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Først beregnes det hvor stor hele keglens (snapseglassets) rumfang er:

$$R = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 7 \quad = \quad 65{,}97$$

keglen skal nu altså kun fyldes halvt dvs. at der skal fyldes et rumfang på ca. 33

Vi har nu flg udtryk: $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = 33$

Da både r og h er ubekendte beregnes forholdet mellem dem hvis glasset var helt fyldt:

$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ h er altså $= 2\frac{1}{3}\,r$

Udtrykket er nu $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2\frac{1}{3} r = 33$

r findes: $r = 2{,}38$

glasset skal altså fyldes: $2{,}38 \cdot 2\frac{1}{3} = 5{,}56$ cm op

eller sagt på en anden måde:

glasset skal fyldes $\left(\frac{5{,}56}{7}\right)$ $\frac{4}{5}$ op

Opg 2a

Beholderens rumfang sættes til 300 cm^3

Formlen for beholderens overflade er:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

vi har nu en formel med 3 ubekendte overfladen radius og højden på dåsen. Derfor findes et nyt udtryk for cylinderhøjden vha. formlen for beholderens rumfang

$$\pi \cdot r^2 \cdot h + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right) = 300 \quad (h \text{ isoleres})$$

$$\pi \cdot r^2 \cdot h = 300 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right)$$

$$h = \frac{300 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right)}{\pi \cdot r^2}$$

$$O = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(300 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3\right)\right)}{\pi \cdot r^2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Ti-83 plus benyttes og minimum findes

$x = 5,23$

$O = 172 \ cm^2$

2c

tid	lille viser har bevæget sig	Store viser har bevæget sig
efte 1 time	5	60
5 min	5,415	5 (mere end de 60)
6 min	5,495	6 (—— " ——)

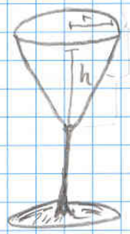
Efter en time har den lille viser bevæget sig 5 "hak" (min) og den store 60 ⇒ kl er et. Herefter bevæger den lille viser sig 0,083 "hak" i minuttet mens den stor bevæger sig ~~et~~ hak pr min. Man kan altså oven for se at den lille viser igen bliver overhalet imellem det 65 og det 66 min efter kl. 12.

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen: Skriftlig eksamen		Fag/niveau: matematik	Dato: 15/8-2002
N		Klasse/hold: 3.x	Nr.: 14
Ark nr.: 1	Antal ark i alt: 2	Tilsynsførendes sign.: KB	

Lyreco

Opgave 1a:

Hovedet på et snapseglas har form som en omvendt kegle:



radius sættes til 2 cm, og højden sættes til 6 cm.
Herved kan rumfanget beregnes, vha. formlen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \Rightarrow$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 6 \quad \Rightarrow$$

$$V = 25{,}1327 \text{ cm}^3$$

For at glasset er halvt fyldt, skal rumfanget altså være: $(25{,}1327 : 2) \text{ cm}^3 = 12{,}5664 \text{ cm}^3$

~~højden angiver nu hvor højt der skal skænkes op før glasset er halvt fyldt. Denne beregnes vha samme formel som før, idet vi nu kender rumfanget og radius er den samme:~~

$\cancel{12,5664 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot h}$

$\cancel{\frac{12,5664}{1/3 \cdot \pi \cdot 2^2} = h}$

$\cancel{3 = h}$

Når vi skal finde ud af hvor højt vi skal skænke op, kende vi ikke r, da denne bliver mindre i takt med at h også bliver mindre. Vi har altså to ubekendte.

Men udfra formlen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

kan r^2 skrives på en anden måde:

$$\frac{V}{1/3 \cdot \pi \cdot h} = r^2$$

Det nye r^2 indsættes i formlen:

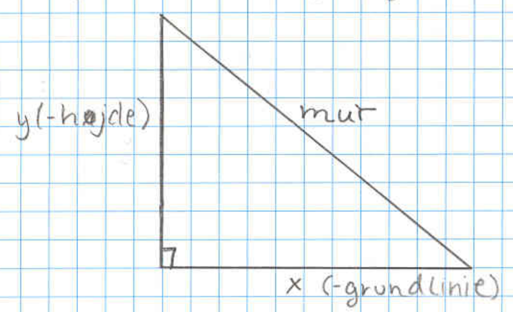
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{V}{1/3 \cdot \pi \cdot h} \cdot h$$

Hvor vi nu kun har én ubekendt, nemlig h.

Ved at isolere h, og indsætte det kendte rumfang (12,5664) findes h, og derved svaret på hvor højt op snapseglasset skal skænkes for at være halvt fyldt:

Opgave 1c

- Jeg antager at vi har 60 m stakit til rådighed.
- Jeg antager at indhegningen former sig sådan:



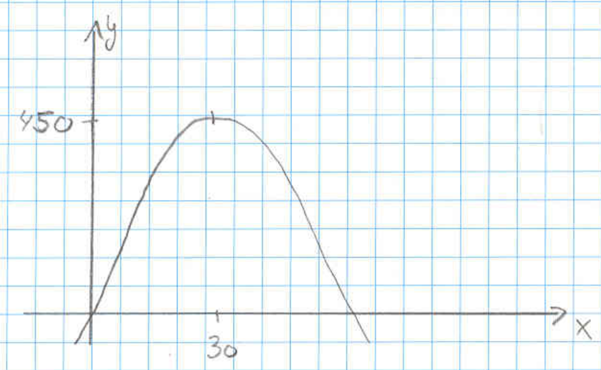
Indhegningens areal $= \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$ el. $\frac{1}{2} \cdot y \cdot x$

siden y kan også skrives: $y = 60 - x$.

Derved kan arealet også omskrives:

$$A = \frac{1}{2} \cdot y \cdot x \Rightarrow$$
$$A = \frac{1}{2}(60 - x) \cdot x \Rightarrow$$
$$A = (30 - \tfrac{1}{2}x) \cdot x \Rightarrow$$
$$A = 30x - \tfrac{1}{2}x^2$$

For at finde det maximale areal, indtegnes denne funktion på lommeregneren:



Maximum aflæses på lommeregneren:

$X = 30$
$A = 450$

Maximum kan også findes ved at differentiere funktionen:

$$A = 30x - \frac{1}{2}x^2$$
$$A' = 30 - 2 \cdot \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow$$
$$A' = 30 - x$$

Ved at sætte dette lig 0, findes det punkt på grafen hvor hældningen er 0. Altså maximum:

$$0 = 30 - x \quad \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{x = 30m}}$$

Den beregnede x-værdi indsættes i formlen $y = 60 - x$, og y-værdien beregnes:

$$y = 60 - x \quad \Rightarrow$$
$$y = 60 - 30 \quad \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{y = 30\,m}}$$

Herefter beregnes indhegningens max. areal:

$$A = 30x - \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow$$
$$A = 30 \cdot 30 - \frac{1}{2} \cdot 30^2 \quad \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{A = 450\,m^2}}$$

Hvilket stemmer overens med værdien jeg fandt på lommeregneren.

For at få det maximale areal, skal stakittet altså deles midt over, og samtidig danne en vinkelret trekant.

Til denne løsning skal muren desuden være mindst:

Skolenavn/kursus:	051 ALLERØD GYMNASIUM		
Prøve/Eksamen: Skriftlig eksamen		Fag/niveau: matematik	Dato: 15/8-2002
N		Klasse/hold: 3.x	Nr.: 14
Ark nr.: 2	Antal ark i alt: 2	Tilsynsførendes sign.: KB	

Lyreco

For at beregne dette benyttes Pythagoras-sætning:

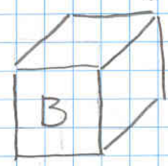
$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = mur^2 \Rightarrow$$
$$30^2 + 30^2 = mur^2 \Rightarrow$$
$$1800 = mur^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{1800} = mur \Rightarrow$$
$$42{,}43\,m = mur$$

Muren skal altså være mindst 42,43 m.

Opgave 2b:

En bestemt terning har et rumfang, der er k gange så stort som rumfanget af en anden given terning:

rumfang a



rumfang b = a · k

For at beregne forholdet mellem overfladarealerne på de 2 terninger, beregnes et pr. eksempler:

Eks 1:

Siden i terning A sættes til 5. k sættes til 4.

Rumfang a : $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

Rumfang b : $125 \cdot 4 = 500$

siden i B : $\sqrt[3]{500} \approx 7{,}937$

Overflade a : $(5 \cdot 5) \cdot 6 = 150$

Overflade b : $(7{,}937 \cdot 7{,}937) \cdot 6 \approx 377{,}976$

Forhold ml. overfladerne : $377{,}976 : 150 \approx \underline{\underline{2{,}5}}$

Eks 2:

Siden i A sættes nu til 7. k sættes stadig til 4.

Rumfang a : $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

Rumfang b : $(343 \cdot 4) = 1372$

Siden i B : $\sqrt[3]{1372} = 11{,}1118$

Overflade a : $(7 \cdot 7) \cdot 6 = 294$

Overflade b : $(11{,}1118^2 \cdot 6 = 740{,}8326$

Forhold ml. overfladerne : $740{,}8326 : 294 \approx \underline{2{,}5}$

Forholdet i de to eksempler blev altså 2,5.

Hvis siden i terningen A benævnes x, kan det skrives på en anden måde:

Rumfang a $= x^3$

Rumfang b $= x^3 \cdot k$

Overflade a $= x^2 \cdot 6$

Overflade b $= \left(\sqrt[3]{x^3 \cdot k}\right)^2 \cdot 6$

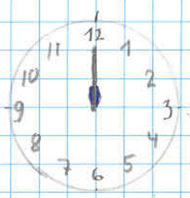
Derved kan der opskrives en formel for forholdet mellem overfladearealerne:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3\cdot k}\right)^2\cdot 6}{x^2\cdot 6} \Rightarrow$$

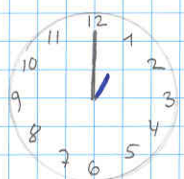
$$\frac{\left(\sqrt[3]{x^3\cdot k}\right)^2}{x^2} = \text{forholdet ml overfladearealerne}$$

Opgave 2c:

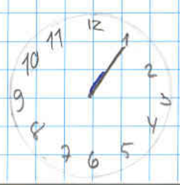
Et ur med en stor minutviser og en lille timeviser går præcist. Klokken 12 passerer den store viser den lille:



Når der er gået 1 time, har minutviseren bevæget sig en hel omgang og står nu igen på 12. Mens timeviseren kun har bevæget sig hen til 1-tallet.



5 minutter efter vil den minutviseren vise 1, og minutviseren vil passerer timeviseren igen.



Klokken er nu 13.05

Der er gået 1 time og 5 minutter, og dette vil hele tiden være gældende.
Næste gang at viserne passerer hinanden, vil klokken være 14.10, næste igen vil klokken være 15.15, osv osv.
Hver gang minutviseren har bevæget sig en omgang, (altså 60 minutter) vil timeviseren have bevæget sig det der svarer til 5 minutter for minutviseren, hvilket er grunden til at der vil gå yderligere 5 minutter inden de passerer hinanden.

G Den officielle afsluttende forsøgsrapport

Det følgende er en uredigeret gengivelse af den officielle rapport (Wegener; 2002) som den lærer der havde stået for gennemførelsen af forsøgsundervisningen indsendte til Undervisningsministeriet i september 2002 som den obligatoriske afrunding på Allerød-forsøget (se kapitel 12).

RAPPORT OM FORSØGET "Modellering, problemløsning og projektarbejde i matematik".

Forsøget er gennemført på Allerød Gymnasium (eks.nr.051) på obligatorisk niveau i perioden 2000-2002.

Det foregik i det væsentlige kun i matematik med lidt støtte fra dansk og fysik i enkelte projektforløb.

Holdets lærer Karsten Wegener stod med støtte i planlægningen fra phd-studerende Tomas Højgård Jensen fra RUC for undervisningen.

BAGGRUND OG FORMÅL

"Hvad skal vi bruge det til ?" er et velkendt og ofte forekommende spørgsmål i matematikundervisningen, måske især på obligatorisk niveau. Og et meget relevant spørgsmål, som det ikke så tit var muligt at besvare fyldestgørende .

Ønsket om at lave en undervisning, der var mere knyttet til fagets anvendelsesmuligheder har været hoveddrivkraften bag forsøget. Idéen var at placere modelbegrebet centralt, både i projekterne og problemopgaverne, for at se hvor langt det var muligt at komme på obligatorisk niveau med dette begrebsapparat.

FORLØBET

Mere konkret ønskede vi at træne elevernes evner på to forskellige måder :

1) I projekterne skulle eleverne vælge sig et emne, der kunne træne en af følgende udvalgte kompetencer :
   A) Historisk-kulturel kompetence , B) Modelleringskompetence , C) Anvendelseskritisk kompetence &
   D) Strukturel kompetence.

Denne del var planlagt til at tage halvdelen af undervisningstiden, hvorfor halvdelen af hjemmeopgaver var erstattet af rapporter, 8 i alt blev det til, og læsepensum var også halveret.

Den valgte arbejdsform skulle gøre faget mere interessant for eleverne ,der gennem valget af konkrete emner til deres egne rapporter kunne få større indflydelse på undervisningens indhold end sædvanligt.

Der blev arbejdet i grupper på 3-4 personer, som over en 6-7 ugers periode fik halvdelen af timerne på skolen stillet til rådighed og så skulle færdiggøre arbejdet hjemme , individuelt ! Disse forløb var svære at holde indenfor de vedtagne tidsfrister, idet navnlig start- og slutfaserne tog megen tid. Vi lagde vægt på ,at det så vidt muligt var eleverne selv, der valgte emnerne og lavede problemformuleringerne - læreren var kun konsulent.

Udover at bruge vores lærebøger som håndbøger inddrog vi også supplerende matematisk litteratur til visse grupper: Lineær programmering, simpel kryptering og mange statestikker fra alt fra Rådet for større Færdselssikkerhed til Sundhedsstyrelsen blev hentet ned på nettet. Vi har også benyttet Morten Blomhøjs modelbeskrivelse som ramme for forståelsen af kompetencerne.

Ved tilbageleveringen af rapporterne blev der udover en skriftlig, individuel vurdering af sammenhæng, matematik og sprog også sædvanligvis givet en mundtlig kommentar til grupperne.

I 1.g havde vi et kort, men ret vellykket samarbejde med klassen dansklærer, Lis Maegaard, om de sproglige forskelligheder i almindelig sprog og rapportsprog. I det hele taget var inddragelse af større dele tekst en god oplevelse, der dels gav eleverne frihed og mulighed for at udtrykke sig nuanceret, men også stillede krav og gjorde misforståelser og usikkerheder tydelige for læreren.

Efteråret i 2.g gik for en alt for stor dels vedkommende med et tværfagligt projekt med fysik. Da holdets fysiklærer, Ole Bakander er en meget travl mand, og det var jeg også i den periode, var der allerede problemer i planlægningsfasen og bedre blev det ikke , da vi kom i gang. Fagenes meget forskellige krav og den efterfølgende dobbelte evaluering voldte en del problemer.

2) I den øvrige undervisningstid skulle vi så gennemgå forskellige matematiske værktøjer, så vidt muligt gennem arbejde med problemorienterede opgaver. Her skulle eleverne lære forskellige generelle strategier til at få hul på denne type opgaver. Vi arbejdede

med at kunne takle den stress, som ofte kunne gribe en, når man stod overfor en "nød", som man ikke lige kunne få hul på. Vi arbejdede i grupper, her til en slags "brain-storming". Også dette element var ganske tidskrævende.

Undervisningen foregik her udfra udvalgte eksempler, hvor vi brugte simplificering og taleksempler som startmetoder.
Planlægningen og den løbende evaluering har været et tæt samarbejde mellem Tomas Højgård Jensen og undertegnede. Meget af arbejdet bestod i at finde og omarbejde og i mange tilfælde selv fabrikere opgaver idet det eksisterende opgavemateriale ikke var egnet. Vi har i denne forbindelse også af og til holdt møder med Erik von Essen, som skulle ha´ lavet forsøget på Himmelev Gymnasium, hvor der desværre ikke kunne samles elever nok til at gennemføre forsøget.

Det første år gennemførte vi 5 projekter med tilhørende rapportafleveringer og projektperioderne afløste således hinanden direkte næsten uden pauser. Teori- og problemdelen lå så som små øer indimellem projekttimerne. Vi arbejdede med de traditionelle emneområder : Geometri og funktioner og brugte vores TI-83 flittigt, når teorien ikke slog til. Vores bekendtgørelse var den traditionelle, blot uden de uddybende kommentarer og vi skulle således igennem alle de sædvanlige områder, blot i lidt forkortet version.

Ved årsprøven efter 1.g gennemførte vi en skriftlig eksamen, hvor eleverne ved en mindre pointafgivelse kunne "købe" hjælpespørgsmål. Dette var vores første bud på at sikre at de svagere elever ikke skulle få besvær med at komme i gang. Kun ganske få elever benyttede sig af denne mulighed og vi ændrede derfor formen.

Den mundtlige årsprøve foregik på den måde, at eleverne trak en rapport ud af de 4 , de havde valgt at opgive til prøven, og så skulle de demonstrere den kompetence som rapporten dækkede, og fortælle om indholdet, navnlig den anvendte matematik og den matematik, der kunne være anvendt. Der var ikke foretaget beskæringer i det læste pensum. Prøven var efter vor opfattelse - Tomas HJ var censor - god: Det var nemt at foretage en bedømmelse og hele karakterskalaen kom også i brug. Vi havde naturligvis gerne set, at i det mindste nogle elever fra holdet var kommet op til eksamen efter 2.g, men det skete altså ikke.

I 2.g skar vi projekternes antal ned til 3 for at vinde mere tid til teorigennemgang. Yderligere blev et af projekterne bundet til at handle om grænseværdi og/eller differentialregning for at styrke dette område, som visse elever jo skulle gå videre med i 3.g

Indimellem blev der også trænet lidt på opgaver uden hjælpemidler og der blev indleveret en negativliste til disse, idet holdets pensum jo kun var det halve af det normale.

EVALUERINGEN

Evalueringen af forsøget foregår samtidigt med at vi lige har gennemført en omeksamen med et utilfredsstillende resultat. Censorernes vurderinger er direktoratet bekendt og set fra deres synsvinkel er jeg ikke uenig.

Selvfølgelig mener jeg også forsøget rummer positive oplevelser, men det kan under de givne forhold ikke undgås, at dette afsnit mest vil blive et forsøg på at analysere, hvad der ikke gik så godt:

Det største problem i forsøget var mangel på tid. Projekterne, navnlig det tværfaglige i 2.g, tog for megen tid. Gruppearbejdsformen giver jo en del spildtid, som eleverne dog har ment rigeligt blev indhentet i de små hjem , når rapporterne blev skrevet, ofte med brug af nattetimer og week-end´er.

Indimellem skulle vi så læse pensum og lave træningsopgaver, men da vi også meget gerne skulle lave problem- orienterede opgaver stod vi her overfor et andet stort problem: Vi gennemførte ikke bare et - med projektrapporter - men også et med problemorienterede opgaver. Og så er det egentlig ikke så underligt, at vi manglede tid.

Modellering kræver et vist beredskab af funktioner til beskrivelse af forskellige udviklinger, og det var ikke muligt at opnå for alle elever. Anvendelseskritik på givne modeller er nok også en stor mundfuld for en matematiker på obligatorisk niveau. Det er klart, at elever på B-niveau har mest behov for kendskab til matematiks anvendelse, men samtidigt er det svært at give dem de nødvendige forudsætninger; så skal der i hvert fald sorteres mere radikalt ud i pensumlisten. Det var nok en fejl i vores forsøg, at vi beholdt alle emnerne og blot sprang de uddybende kommentarer over. Det stillede eleverne dårligt, fordi de så skulle klare sig hele vejen med et "tyndere" lag af viden og kunnen.

Mine egne største bekymringer før vi startede dette forsøg var

1)

Hvordan sikrede vi, at de svage elever kunne komme i gang med de skriftlige opgaver og

2)

Hvordan kunne vi evaluere elevernes "nye" færdigheder, dvs dem, der kom ud væsentligst af projektarbejdet, men også af at systematisere og afgrænse problematikker fra "virkeligheden". For det var jo ganske klart, at de IKKE kunne lære den samme mængde ren matematik som andre 2.g´er, når de kun havde den halve tid til rådighed.

Vi havde størst bekymring angående den skriftlige eksamen, og det viste sig jo desværre at være velbegrundet .

Tilbage står desværre hos mig og vel navnlig hos eleverne et indtryk af, at de ikke har lært tilstrækkeligt indenfor de områder, der blev evalueret.

Projekterne, som ikke kunne evalueres skriftligt skulle kun indgå i mundtlig eksamen, som ikke blev aktuel. Da jeg havde indregnet elevernes rapportkarakterer i den skriftlige årskarakter - rapporterne trådte jo i stedet for halvdelen af de skriftlige hjemmeopgaver - blev denne ofte ret forskellig fra eksamenskarakteren. Dette kom naturligvis bag på mange og også lidt på mig selv.

Blandt de positive ting ved forsøget må allerførst fremhæves glæden og interessen for faget, som lige pludselig forekom relevant og anvendeligt i sammenhænge, man ikke tidligere havde troet muligt. Det gjorde, at det ikke var et problem at få eleverne til at arbejde med faget, også i deres fritid, når de skrev deres rapporter færdige hjemme eller hos kameraterne.

Arbejdsformen var som tidligere nævnt tidskrævende, men lærte også eleverne noget om samarbejde og tolerance, idet grupperne ikke var de samme hver gang. Vi inddrog derfor en gruppebrainstorming i den skriftlige eksamen.

Tilbage står desværre, at vi nok ville lidt for meget på én gang: Man burde lave forsøg, kun med projektarbejde og et lidt begrænset pensum; og et forsøg med problemorienterede opgaver uden projekter for, på trods af de nederlag, vi her har lidt, tror jeg stadig på begge idéerne - bare ikke samtidigt !

Elevernes vurdering af forsøget er, at det har været spændende og lærerigt, men at den eksamen de blev underkastet generelt var for svær. De er ret sikre på, at undervisningen har givet dem noget, andre elever ikke har fået, nemlig et indtryk af, at matematik kan bruges til noget uden for klasselokalet.

De har forskellige meninger om den store elevindflydelse på undervisningen, idet mange - måske i lyset af det svage eksamensresultat - kunne have ønsket større styring og mere målrettet undervisning. Det tværfaglige projekt i efteråret 2001 synes også at have varet for lang tid og dermed have virket demotiverende.

I det hele taget fremgår det klart af elevernes evaluering, at der har været for lidt tid til rådighed.

Et par ting står klart for mig efter dette meget radikale forsøg : Problemopgaver og projektarbejde er meget motiverende for eleverne, men samtidigt også meget tidskrævende – det vil i praksis sige , at der skal en mærkbar pensumreduktion til. Man skal nok heller ikke overlade for megen styring til eleverne, da en del elever på B-niveau ikke føler sig trygge ved det. Problemformuleringen i projektarbejderne kræver også stor opmærksom fra læreren.

Et lidt specielt problem i dette forsøg har været, at der på grund af udskiftning af fagkonsulent midt i forsøgsperioden, ikke har været så god en kontakt omkring f.eks. udvælgelsen af de skriftlige eksamens-opgaver, som det kunne være ønskeligt.

Og så er der evalueringen : Her bør der efter min mening arbejdes frem mod nye og utraditionelle eksamensformer, der på en hel anden måde kan vise elevernes kunnen i disse "nye" færdigheder, som vi har arbejdet med i dette forsøg.

Odense d.20/9-2002

Karsten Wegener

H Afsluttende spørgeskema-besvarelse fra samtlige elever

Det følgende er gengivelse af besvarelser af spørgsmålene i et spørgeskema fra samtlige 25 elever som deltog i Allerød-forsøget (se kapitel 12 for en nærmere karakteristik). Spørgeskemaet blev rundsendt individuelt pr. e-mail i september 2002, kort efter forsøgsundervisningens afslutning med den skriftlige omeksamen i august 2002. Sidste besvarelse blev indhentet i februar 2003.

I samlet form lyder spørgsmålene som følger:

Generelt (side 365)

Nævn mindst **tre gode ting**:
Nævn mindst **tre dårlige ting**:

Overordnet tilrettelæggelse (side 372)

Hvad synes du om **arbejdsformen og tidsforbruget**? Skulle vægtningen af tavlegennemgang, opgaveregning, projektforløb mv. have været anderledes? Hvad synes du om vekslingen mellem disse arbejdsformer?
Tilrettelæggelsen har blandt andet været styret af, at I skulle udvikle de **faglige kompetencer**, som var en del af forsøgsbekendtgørelsen. Hvordan har du oplevet dette element i undervisningen?

Specielt om kursusdelen (side 377)

Med kursusdelen menes den del af undervisningen hvor der var et på forhånd fastlagt stof, som blev bearbejdet vha. tavlegennemgang, forskellige former for opgaveregning mv.
Hvad synes du om **stofgennemgangen** fra Karstens side?
Hvad synes du om de **opgavetyper** der er blevet arbejdet med? Var der for meget/lidt af bestemte typer?
Hvad synes du om balancen mellem hvor meget I som elever bestemte over arbejdsprocessen og hvor meget Karsten bestemte: Var der for meget/lidt **deltagerstyring/lærerstyring**?

Specielt om projektdelen (side 384)

Med projektdelen menes den del af undervisningen der har bestået i en række projektarbejder, som alle blev afsluttet med afleveringen af en rapport.
Hvad synes du om **måden de enkelte projektforløb blev igangsat på**?
Hvad synes du om **gruppearbejdet** undervejs i projekterne?
Hvad synes du om **vejledningen** fra Karsten?
Hvad synes du om balancen mellem hvor meget I som elever bestemte over arbejdsprocessen og hvor meget Karsten bestemte: Var der for meget/lidt **deltagerstyring/lærerstyring**?

Om matematisk modellering (side 392)

En vigtig del af forsøget har bestået i at forsøge at hjælpe jer med at blive bedre til matematisk modellering, hvilket er grunden til at vi nu spørger specielt til det.
Hvad forstår du ved **matematisk modellering**?
Er der ting i forbindelse med matematisk modellering som du i særlig grad synes du er **blevet bedre til** eller er kommet til at **vide mere om** i løbet af de to år?
Hvad synes du er **det sværeste** ved matematisk modellering?

Eksamen (side 397)

Hvad synes du om **den mundtlige eksamensform**, som vi benyttede til årsprøven efter 1.g.?
Hvad synes du om **problemløsningsdelen af den skriftlige eksamen** som den forløb til omeksamen i august måned?
Hvordan vil du karakterisere **forskellen** på disse opgaver og de opgaver der blev stillet til den første eksamen i maj?
Hvad synes du om **færdighedsdelen af den skriftlige eksamen** som den forløb til omeksamen i august måned?

Indsats (side 405)

Hvad synes du om **Karstens indsats**?
Er der ting han kunne have **gjort anderledes**, som efter din mening ville have gjort forløbet mere udbytterigt eller på andre måder bedre?
Hvad synes du om **din egen indsats**?
Er der ting du kunne have **gjort anderledes**, som efter din mening ville have gjort forløbet mere udbytterigt eller på andre måder bedre?

Afrunding (side 412)

Et af målene med dette forsøg har været at få erfaringer med, hvordan man skal gribe tingene an hvis en lignende form for undervisning skal gøres mere udbredt i fremtiden.
Er der i den forbindelse noget fra dette forsøg du synes har været specielt vellykket, og derfor vil **anbefale at man holder fast i**?
Er der noget du synes har været specielt lidt vellykket, og derfor vil **anbefale at man gør anderledes**?
Eventuelt **yderligere bemærkninger**:

Besvarelserne er i det følgende grupperet efter de stillede spørgsmål, så hver elev optræder med et nummer svarende til rækkefølgen besvarelserne indløb i. Et manglende tal i rækken af svar betyder, at den pågældende elev ikke har besvaret spørgsmålet. Både spørgsmål og svar er gengivet uredigeret, bortset fra at opsætningen (fx linjeskift) og oplagte stave- og slåfejl er rettet af hensyn til læseligheden. Af samme grund har jeg i kantede paranteser indsat forslag til ord på steder, hvor syntaksen nødvendiggør en tilføjelse.

Generelt

Nævn mindst ***tre gode ting****:*

1. Den første og bedste ting ved dette forsøg har efter min mening været at samarbejdet omkring matematikken har bragt klassen mere sammen socialmæssigt. Dengang vi startede i 1.g var det jo begrænset hvor mange man kendte og pga. denne slags undervisning tilvænnede vi os hurtigere til hinanden og fik det både bedre i klassen og udenfor klassen.

   Den anden ting jeg syntes har været godt i vores forøsg har været de små lukkede opgaver, hvor man hver især har haft muglighed for at trække sin egen synsvinkel og derved er der ikke noget rigtigt facit, blot en masse teorier som hver især kan have sine fordele.

   Den tredje og sidste ting som jeg syntes burde nævnes er, at man får en helt ny måde at gribe matematik an rent fagligt. Man får i vores opgaver den frihed til selv at kunne trække sin opgave i den retning man syntes er bedst og mest relevant. Dette er mere selvstændigt og jeg er sikker på at det er mere relevant at bruge end den slaviske form for matematik, i fremtiden.

2. Der var mere afveksling i undervisningen (mellem projekt og tavleundervisning).

   Jeg har lært, hvordan man kan bruge matematikken på virkeligheden.

   Jeg har lært at løse en opgave, hvis type jeg ikke har set før vha. "udfoldning".

3. Projektarbejdet, ideen med den nye undervisning og noget af eksamensformen.

4. Mere perspektiveret syn på matematik, mere spændende.

   En større mulighed for at løse hverdagsproblemer ved matematik, hvor man ellers ikke ville tænke på det.

5. Udmærket måde at lære matematik på – hvor man bedre selv får mulighed for at komme til at lære stoffet.

   Rapporterne har bedre og mere sammenhængende mat i forhold til alm. blækregning og dette giver mere forståelse.

Matematik kan lettere ses i sammenhæng med "virkeligheden" og redskabet matematik bliver mere anvendeligt.

Man får i højere grad [lejlighed] til at sætte ord på matematikken – bedre måde at forklare og forstå.

6. Vi har lært at lære – altså lært hvordan man bruger matematik, i stedet for en masse formler man alligevel ikke kan bruge til så meget.

   Vi kan bruge den matematik vi har lært ude i den "virkelige" verden.

   Vi har haft mulighed for at påvirke undervisningen.

7. Projektarbejdet og dermed tiden til at fordybe sig.

   At man fik en forståelse for hvor matematikken egentlig kan benyttes.

8. Jeg synes at det er rart at kunne se en mening med det vi laver – hvad det skal bruges til, og at vi lærer at klare os selv, ved at skulle løse en opgave uden egentligt at have lært ret meget. Derudover fungerede den mundtlige eksamen godt.

9. Man får en bredere tankegang og matematikken bliver anvendelsesorienteret.

   Måden man lærer at gribe et problem an på.

   Man har lært meget omkring samarbejde i forbindelse med problemopgaverne og projekterne, som jo alle har være baseret på gruppearbejde.

10. Man tænker i et større perspektiv.

    Godt arbejde med problemopgaver.

    Har lært at samarbejde.

11. Det var sjovt at arbejde med matematik på en lidt anderledes måde.

    Det var en god måde at få styr på nogle matematiske emner ved at skrive en rapport over det.

    Jeg har altid synes gruppearbejde er en god måde at arbejde på.

12. Gruppearbejdet, 1.g forløb godt, men siden blev hele projektet for "rodet".

13. Den største fordel ved vores projekt har helt klart været at man har opnået en større forståelse for hvad matematikken kan bruges til. Det har ikke bare været nogle "slave-opgaver" man lærte at regne udenad, men egentlig ikke vidste hvad man skulle bruge til. Hele tiden har man set eksempler på hvad matematikken kan løse af hverdagsproblemer. Dette har gjort det mere spændende at lære...

    Projekterne har gjort, at det er muligt at fordybe sig i et emne man finder interessant. Vi har haft rimelig frie rammer, til selv at bestemme og råde over den tid og de materialer der var tilstede. Dette har helt klart været med til motivere mig...

14. Selve ideen med projektet er god. At man lærer at gribe problemerne anderledes an.

    At man lavede "forarbejdet" til rapporterne i grupper og derefter skrev dem hver for sig.

    Eksamensformen (både den skriftlige og den mundtlige).

15. Vi lærte at skrive rapporter om et matematisk emne.

    Gruppearbejde, fordi man lærte af de andre og se det fra en anden synsvinkel.

16. Gruppearbejdet/rapporterne, tackling af problemerne, gruppearbejdet til eksamen.

17. Man lærer mat på en måde man bedre kan bruge i den virkelige verden!

    God mundtlig eksamen...jeg var ikke ligeså nervøs og for mig virkede det mere stille og roligt end en normal eksamen ville gøre.

18. Fleksibilitet, blevet bedre til at udtrykke mig i rapportskrivning, samarbejde.

19. God kombination af tavleundervisning og gruppearbejde.

20. Godt at man skulle lave rapporter, for så fik man mere viden om hvordan man kunne bruge matematikken. Jeg synes at projektet i det hele taget har været godt, for man lærte hvordan man kunne anvende matematikken i hverdagen. Og at man har lært at samarbejde med andre...

21. Den anderledes måde at arbejde med matematik på. Projekterne.

22. Selve ideen med rapporterne frem for ugentlig blækregning.

    Gruppearbejdet i forbindelse med rapporterne.

    Opgaverne med hjælpemidler (med den undtagelse at vi manglede tilstrækkelige matematiske midler).

23. En klar fordel for mig, var samarbejdet i projektopgaverne, i og med jeg ikke har en særlig stærk matematisk hjerne. Der var ikke noget facit i de opgaver vi lavede, det gjorde det muligt at tænke kreativt, og så var det også en del sjovere, pga. der ikke var de normale intetsigende og trivielle klasseundervisninger.

    En anden positiv ting vi gjorde i timerne, var en gang imellem at dele klassen i to, så dem med stor matematisk kunnen kunne få lov at gå videre med et nyt emne og vi andre fik muligheden for at gå dybere i stoffet. Nogle turde lige pludselig at række hånden op og spørge om noget, måske fordi de vidste at de andre i lokalet sikkert heller ikke var sikker i stoffet.

24. Jeg kan godt lide at arbejde i grupper.

    Det, at prøve noget nyt.

    At afslutte et forløb med rapport. Jeg har her i 3.g haft den normale matematik. Her synes jeg at man godt kunne bruge nogle lidt større rapporter, måske til at forstå beviserne.

25. Man skulle tænke på en anden og mere kreativ måde. Antal af rapporter var godt og de emner vi berørte kunne man bruge i hverdagen. Inspiration og hjælp fra ens gruppe var også en god ting.

*Nævn mindst **tre dårlige ting**:*

1. Generelt synes jeg at der blev sløset en smule en gang imellem. Dette kan have noget at gøre med at vi generelt ikke havde så mange afleveringer (efter min mening). De afleveringer vi lavede var "store afleveringer" eller lign. og fyldte derfor for 2. Jeg ved godt at projektdelen selvfølgelig tager en del mere tid fordi det er os selv der sidder og arbejder med tingene i stedet for at få en gennemgang af det i klassen som i de andre klasser. Men en smule mere "rigtig matematik aflevering" skulle måske være taget i brug.

   Derudover er jeg ret imponeret over hvor få mennesker der lavede noget i vores gruppeafleveringer. I disse afleveringer var meningen at man skulle arbejde sammen og derved udarbejde en opgave sammen. Mange valgte at rende rundt og ikke få lavet noget hvor de sidste i gruppen måske lige gav den, den ekstra skalle for dem.

   Jeg synes at der måske har været en lidt sløset instilling til afleveringer. Folk de afleverede stort set hvornår det passede dem, hvis de overhovedet afleverede. Jeg ved godt at det kommer til at ramme dem selv, men dette kunne måske også forhindres ved en lidt strammere og måske lidt mere "slavisk" gennemgang. Jeg tror at man skal finde en linie imellem det slaviske og det projektorienterede matematik og at vores linie lå for meget ovre på den projektorienterede. Dette siger jeg fordi jeg nogle gange havde det sådan at jeg ikke havde nok matematisk viden til at trække projektopgaverne i nogle retninger, dette medførte måske at man fik sine ideer fra andre og derfra så gik videre.

2. At vi langt fra nåede at lære alt det vi burde.

   At det var svært at tilpasse opgaverne, så vi engang imellem fik for lette og andre gange for svære opgaver.

At Karsten boede så langt væk, for det gjorde, at han ikke altid kunne være der for os, når der var problemer med projekterne.

3. Nogle dele af eksamensformen (u. hjælpemidler), blækregningerne (minder meget om den gamle form, som vi netop skulle prøve at undgå (?)) og vores mange svagheder.

4. Manglende evne til bogstavregning. Manglende rutine. Manglende sikkerhed/fortrolighed med matematik.

5. Mangel på færdigheder indenfor hovedregningsdel.

   Man kan lettere komme til at sidde meget fast et sted i en opgave, men måske betyder dette at man vrider hjernen lidt mere for at få styr på trådene.

   Der bliver brugt meget tid på rapporterne, men dette er også nødvendigt.

6. Den skriftlige eksamen og undervisningen passede ikke sammen.

   Mangel på struktur i unervisningen.

   Der var ikke nok tid til både projekter og almindelig undervisning, meget blev meget overfladisk gennemgang bl.a. pga. mangel på tid.

7. Manglende struktur (rent planlægningsmæssigt).

   For lidt træning i brug af den matematiske læring (for få øvelser).

8. Vi var ikke forberedt ordentligt til den skriftlige eksamen – eller også var den skriftlige eksamen ikke indrettet ordentligt efter vores projekt, især delen uden hjælpemidler.

9. Mangel på træning af færdighedsregning.

   Undervisningen kunne til tider godt have været bedre struktureret.

   Generelt mangel på træning af teori.

10. Vi mangler teori.

    Undervisningen har været for ustruktureret.

    Projekterne har været for langvarige.

11. Nogen gange kunne det godt blive meget uoverskueligt og rodet.

    For lidt tavleundervisning.

    Nogen gange synes jeg at opgaverne var for store så man til sidst sad og ikke kunne overskue dem (men det var selvfølgelig også os selv der gjorde opgaverne så store).

12. Som censorerne pegede på har vi slet ikke lært nok! Vi er blevet for uselvstændige ⇒ problemer med selv at løse opgaver udenfor gruppen.

    Forvirrende veksling mellem projekter og basal viden.

    Karsten har ikke været hård nok ⇒ at mange ikke tog faget så seriøst med hensyn til rettidige afleveringer, lektier osv.

13. Jeg synes ikke at det er optimalt at vi blev nødt til slette noget fra pensum, for at vi havde tid til vores projekter. At det var en nødvendighed er jeg til gengæld fuldstændig enig i – så hvordan man kan løse dette problem ved jeg ikke rigtig.

    Der var for lidt øvelser, så vi var ikke rigtig sikre i færdighedsdelen.

    Selvom projektarbejdet for det meste har været godt, har man selvfølgelig været meget afhængig af sin gruppe, og hvis vi ikke selv bestemte hvem vi skulle arbejde sammen med kunne man havne i grupper, hvor de andre elever måske hverken havde samme forventninger eller samme mål med undervisningen. Dette kunne selvfølgelig føre til nogle problemer og uenigheder med hvor grundigt arbejdet skulle gøres, og hvor [meget] tid der skulle bruges udover den tid der var stillet til rådighed i skolen.

14. At rapportforløbene ikke var koncentrerede (at der var blandet "normal" undervisning ind i) blev forvirrende.

    Den (efter min mening) seriøse mangel på tid til at lære pensum. Og som følge heraf den helt manglende viden på visse områder. Det er en, skal vi sige alternativ, følelse at sidde til eksamen med en opgave foran sig hvor læreren måske en gang i tidernes morgen har brugt ti minutter på at gennemgå stoffet. Altså generel fejldisponering af tiden.

    Jeg mener at der skulle have været flere afleveringer (almindelige blækregninger til at få indøvet pensum).

15. Vi lærte ikke nok om det grundlæggende, de ting som vi skal kunne klare, i en prøve uden hjælpemidler.

    Gennemgangen på tavlen var for svær at følge med i.

    Det var ofte svært at komme i gang med et emne (i projekter), fordi man ofte startede fra bunden og ikke nødvendigvis havde den viden man skulle have for at komme i gang. Dette medførte at man var stærkt afhængig af en lærer, før man kunne komme videre, og når det nu var sådan med alle grupper i starten, var der meget spildtid.

16. Færdighedsregningen (for svagt stillede), tavleundervisningen kan gå hurtigere.

17. Vi lærte ikke helt så meget som de andre normale mat hold.

    Ikke nok tid til det hele.

18. Ustruktureret, mangel på engagement – både fra elevernes og lærerens side (somme tider), stor forskelsbehandling på eleverne.

19. Ikke nok gennemgang for de svage elever.

20. Vi har forsømt færdighedsregningen og det har været dårligt, vi har konc. os alt for meget om problemopgaver.

21. Den mundtlige eksamensform. Skriftlige eksamensform. Manglende kundskaber med færdighedsregning.

22. Eksamensformen idet den ikke i tilstrækkelig grad tilgodeså vores projekt!

    Vores indarbejdelse af matematiske færdigheder, idet vi brugte alt for meget tid på at kigge på opgaver uden at have værktøjet dvs. i et vist omfang spild af tid, som kunne have været brugt på bedre forståelse af den matematiske metode som skulle opnås. Dette gjorde efter min holdning at vi ikke i tilstrækkelig grad havde nok tid til ordentligt at kunne forstå den matematik som skulle læres.

    Prioriteringen af opgavedelen uden hjælpemidler var alt for lav i den daglige undervisning.

23. Nogle af projekterne kunne godt trække lidt for langt ud. Nogle opgaver kunne godt kræve lidt for meget kreativitet. Den største af ulemperne var nok at der ikke blev lavet nok når vi sad i grupper. Hvis vi fik 4–5 uger til et projekt, så arbejdede mine grupper kun i 1–2 af dem, resten af tiden var ren hygge. Det skyldes nok også at for at kunne lave et sådan projekt, skal elevernes arbejdsmoral være høj og det har min aldrig været.

24. Det er ikke personligt ment, men læreren. Jeg synes ikke, at jeg fik lært det jeg skulle. For mig var han ikke god nok til at lære fra sig. Det var noget nyt for os alle, men jeg synes måske ikke at han fik overskueliggjort stoffet. Han gjorde det ikke enkelt og nemt at forstå. Jeg forstod ikke grundlaget bag forsøget. Jeg fik aldrig sat mig ordentlig ind i de forskellige kompetencer. Fik ikke en stor nok matematisk viden.

25. For mig var hele forløbet lidt ustruktureret og rodet. Idéen til projektet er god men seriøsiteten var for lav blandt eleverne. Måske på grund af læreren.

Overordnet tilrettelæggelse

Hvad synes du om ***arbejdsformen og tidsforbruget****? Skulle vægtningen af tavlegennemgang, opgaveregning, projektforløb mv. have været anderledes? Hvad synes du om vekslingen mellem disse arbejdsformer?*

1. Jeg tror at man skal finde en linie imellem det slaviske og det projektorienterede matematik og at vores linie lå for meget ovre på den projektorienterede. Dette siger jeg fordi jeg nogle gange havde det sådan at jeg ikke havde nok matematisk viden til at trække projektopgaverne i nogle retninger, dette medførte måske at man fik sine ideer fra andre og derfra så gik videre.

2. Der skulle have været mere tavlegennemgang og regnes flere opgaver – for man får ikke styr på en metode ved kun at bruge den en enkelt gang eller to.

   Der blev ofte brugt lidt for lang tid på projektforløb, hvilket gik ud over den almindelige undervisning. Men det var godt at have begge arbejdsformer, så man ikke altid sidder og hører på læreren. Afveksling er altid godt.

3. Jeg synes at vi, her i starten af skoleåret, er blevet kastet ret hurtigt ud i opgaver og blækregning – Jeg ved i hvert fald at jeg ikke er den eneste der forstår emnet særligt godt endnu.

4. Der kunne nok have været flere opgaver, men tiden var ikke til det. Jeg synes vægningen alt i alt var helt OK.

5. De har været tilpasse, men måske kunne man have lavet lidt mere tavlegennemgang til de rapporter der er blevet skrevet.

6. Jeg synes i princippet at vægtningen var god nok hvis vi ikke skulle have været til skriftlig eksamen hvor man manglede at vi havde brugt noget mere tid på gennemgang af færdighedsopgaver, eller også skulle den have været udgået af vores skriftlige eksamen.

   Undervisningen har ofte været meget ustruktureret og vores projektforløb har haft en tendens til at tage for lang tid, hvilket nok delvist har været vores egen skyld.

7. Jeg mener vi brugte for meget tid på projekterne. De er meget tidskrævende, men det drejer sig altså også om at jo mere tid man har jo mere sløser man. Derfor mener jeg sagtens at vi kunne have lavet de samme projekter på mindre tid. Den tid der ville være sparet der skulle så være brugt på klasseundervisning og opgaveregning. Det savnede jeg mere af.

8. I årets løb har det virket fint og afvekslende, men set i lyset af den skriftlige eksamen, har vi ikke haft nok om øvelser uden hjælpemidler.

Generelt har det ikke været så struktureret mht. adskillelse af emner og afleveringsfrister.

9. Alt i alt har det været en meget spændende arbejdsform. Jeg synes, at det har været meget lærerigt og sjovt at lave rapporterne, men på trods af dette synes jeg at vægtningen af projekterne i forhold til teorien har været skæv.

10. Projektforløbet bliver for langt, man skulle have kørt et kortere og mere intenst [forløb]. Vi kunne godt have brugt noget mere tavlegennemgang, da jeg synes man er mest seriøs, ift. i grupper.

11. Jeg synes vi havde for lidt tavlegennemgang af regneregler og opgaver uden hjælpemidler. Færdighedsregningen havde vi jo store problemer med ved eksamen. Så generelt synes jeg vi havde for lidt tavleundervisning.

12. Vekslingen var som før nævnt fin i 1.g men i 2.g blev tingene rodet sammen og vi fik ikke tid til at lære nok "normal matematik". Samtidig mener jeg at der var for mange projekter til at man kunne nå at gøre nye emner helt færdige. Det blev kort sagt lidt umuligt at få helt styr på tingene sådan som vi sprang rundt i det!

13. Jeg synes, at det har fungeret godt med at veksle mellem disse arbejdsformer, det har været med til at variere en ellers ensartet skoledag. Og egentlig synes jeg at de supplerer godt for hinanden. Men som jeg allerede har antydet tidligere, synes jeg at der har været for lidt opgaveregning. Der var tendenser til, at projektforløbene trak for længe ud, tiden ovre i skolen blev ikke altid udnyttet optimalt. Det hele blev udskudt, hvilket betød endnu mindre tid til opgaveregning. Dette har vi, elever, selvfølgelig haft en stor del af skylden for...

14. Som tidligere nævnt synes jeg at tingene skulle have været mere inddelt for at undgå forvirring. Derudover vil jeg sige at jeg synes at vægtningen af de tre (tavlegennemgang, opgaveregning og projektforløb) var fin, hvis det altså blot havde været mere koncentreret.

15. Jeg synes helt klart, at der burde have været mere gennemgang af det basale stof, sådan at vi også kunne klare os når vi fik den type opgaver man gør ved en prøve uden hjælpemidler. Så kan det godt være det går ud over antallet af rapporter man skal nå, men den er vigtig, da det er en del af ens eksamen.

16. Vi kunne godt have brugt mere tid på de enkelte emner og fået 100% styr på det. Flere opgaver i de enkelte emner!

17. Vægtningen har passet nogenlunde måske lidt mere opgaveregning med elementær mat. Ellers skulle man bare have flere timer!

Nogle gange var det lidt svært i overgangene mellem projektet og normal undervisning så nok lidt mere markant skift.

18. Selvom det generelt var mest spændende med projektarbejde, så kunne det til tider godt gå op i hat og briller og vi brugte for meget tid på det. Ellers var vægtningen nogenlunde.

19. Projekterne havde det med at blive alt for langtrukne, (pga. elevernes manglende arbejdsindsats, hvor læreren nok skulle have været mere streng og konsekvent, bl.a. mht. for sent afleverede opgaver).

20. Jeg synes at tavlegennemgangen har været dårlig, altså i 2.g gennemgik Karsten nogle gange noget uden først at have sagt til os at vi skulle læse det inden gennemgangen. Og når vi lavede opgaver så var det sjældent at vi fik rettet dem.

21. Vi har haft mange forskellige gode opgaver, som vi ikke kunne bruge til skriftlig eksamen og derfor har arbejdsformen ikke været god nok. Opgaveregning og tavlegennemgang er blevet nedprioriteret i forhold til projekterne. Problemet er bare det at vi til begge eksamener i højere grad skal anvende opg. regning og tavlegennemgang og derfor er vægtningen forkert.

22. Som nævnt blev opgavedelen uden hjælpemidler for lavt prioriteret og derudover blev der brugt for lang tid på opgaver inden vi havde redskaberne til at løse dem.

23. Nogle af projekterne kunne godt trække lidt for langt ud. Hvis vi fik 4–5 uger til et projekt, så arbejdede mine grupper kun i 1–2 af dem, resten af tiden var ren hygge. Det skyldes nok også at for at kunne lave et sådan projekt, skal elevernes arbejdsmoral være høj og det har min aldrig været. Bortset fra det synes jeg det har været fint planlagt.

24. Arbejdsformen med gruppearbejdet synes jeg var godt. Desværre blev der bare brugt alt for meget tid med rapporterne. Der blev brugt for mange timer oppe i skolen. Det var som om at der blev brugt for lidt tid med tavlegennemgang. Det var som om det bare skulle overstås.

25. Jeg synes at tidsfordelingen var god. Den kunne man ikke klage over. Måske var tiden til rapportarbejde i skolen lidt knap.

Tilrettelæggelsen har blandt andet været styret af, at I skulle udvikle de ***faglige kompetencer****, som var en del af forsøgsbekendtgørelsen. Hvordan har du oplevet dette element i undervisningen?*

1. Jeg har her efter mine 2 år i forsøgsklassen fået et sjovt syn på matematik. Når jeg siger dette er det fordi jeg har det sådan at hvis man får stillet

en forholdsvis åben opgave kan man rent faktisk selv finde et facit. Stort set. Det kræver blot at man kan dokumentere for det man skriver ned og udregner og så læser opgaver og at man derefter finder ud af at man har besvaret spørgsmålene.

2. I starten var det svært at finde ud af hvad de gik ud på, men jeg fandt ud af mange af dem. Jeg synes ikke, at jeg oplevede kompetencerne så meget i tavleundervisningen, det var mere når vi lavede projekter. I projekterne sørgede vi for at få det med, der havde med den pågældende kompetence at gøre.

3. Det har virket ok.

4. Dette har virket idet vi ikke opfattter matematik som en ting, men som flere kombinerede redskaber.

5. Jeg har godt kunnet mærke at der har ligge et låg for [hvor] vidt man kan sprede sig. Dvs. at den matematik der er brugt til rapporterne har været en anelse bestemt.

6. Jeg synes det har været spændende, men har egentlig ikke mærket det i den daglige undervisning, men til rapporterne har det jo været målrettet mod en bestemt kompetence.

7. Det har været en spændende del men også svær, fordi at det er en hel ny måde at tænke på. Det kan til tider gøre det lidt frustrerende fordi det er svært at sætte ord på hvad det egentlig er man har "lært". Jeg kan ærlig talt ikke huske om I gjorde det, men en god ting ville være på forhånd at forklare kompetencerne og hvad de indebærer.

8. Det har været spændende med forskellige kompetencer, men jeg ville gerne fra starten have haft at vide hvad hver enkelt gik konkret ud på for at have en smule baggrundsviden.

11. Jeg synes det var lidt rodet og uorganiseret den måde vi lærte de faglige kompetencer.

12. Vi er måske blevet bedre til at samarbejde og sammen finde løsninger på problemerne, og faglige kompetencer har jeg helt styr på, men det hjælper jo ikke når vi ikke har helt styr på den rent matematiske del.

13. Modelleringskompetencen er helt klart den kompetence der hænger bedst ved, men også de andre kompetencer er blevet arbejdet godt igennem i de enkelte rapporter. Men jeg husker, at jeg altid var lidt usikker på om det var det rigtige jeg skrev i forhold til den og den kompetence. Jeg tror, at jeg ville have haft glæde af en grundigere generel gennemgang.

Udover i projekterne synes jeg ikke at vores timer har været præget af kompetencerne, vi har dog brugt modelleringskompetencen en del i andre "øvelser", men ellers ikke. Jeg ved ikke om det var meningen eller ej.

14. Jeg vil ikke sige at jeg oplevede kompetencerne så meget i den daglige undervisning. Det var egentlig kun i projektforløbene at jeg lagde mærke til dem.

15. Jeg synes det har været nyttigt, at lære at skrive rappport i matematik, det er sikkert noget jeg vil kunne bruge senere. Ved godt at projektets mening var at vi skulle lære at regne opgaver som svarede til virkeligheden, men jeg synes det var enormt svært at få perspektivet i det hele, mens vi var i gang, selvom vi havde fået at vide hvad det gik ud på, så var det svært at se i praksis. Det betyder ikke at det ikke har været der, men jeg synes bare det var svært at se.

16. Har fået nogenlunde styr på halvdelen af kompetencerne. Enkelte af kompetencerne er ikke på plads endnu (sommeren 2002).

17. Jeg har haft lidt svært ved at finde rundt i de forskellige kompetencer så jeg kunne godt have ønsket at vi havde fået gennemgået hvad de forskellige kompetencer var og betød.

18. Visse kompetencer var lettere at arbejde med end andre. Så jeg har både haft gode og dårlige oplevelser mht. kompetencerne.

19. Hmmm... Personligt har mine matematiske evner ikke været tilstrækkeligt gode til, at jeg kunne udvikle mine faglige kompetencer synderligt med denne form for projektundervisning.

20. Godt... !!!!

22. Primært mener jeg at vi har fået mest ud af delen "modellering" idet det er noget vi formentlig vil kunne bruge senere i forbindelse med arbejde m.m. De andre emner har været meget afhængige af det matematiske emne som blev valgt og har i nogle tilfælde medført meget lidt kompetence i forhold til tidsforbruget! Kompetencen historisk matematik var efter min mening unødvendig!!

23. Jeg må nok erkende at de faglige kompetencer ikke er vokset betydeligt, men jeg har også været meget doven og så har jeg ikke nogen tendens til at gøre noget særligt ud af mat.

24. Jeg synes overhovedet ikke, at jeg personligt har udviklet de faglige kompetencer. Jeg ved så ikke om det var min eller Karstens fejl. Jeg ved ikke om jeg er den eneste der har det på den måde.

25. Det er svært at sige. Mit faglige niveau har aldrig været på højde med det normale. Derfor bliver mit faglige udbytte i den enkelte time mindre og mindre som tiden går. Det er måske en anden ulempe ved projektet. Er man først kommet lidt bagud, er det svært at komme op igen.

Specielt om kursusdelen

Med kursusdelen menes den del af undervisningen hvor der var et på forhånd fastlagt stof, som blev bearbejdet vha. tavlegennemgang, forskellige former for opgaveregning mv.

Hvad synes du om ***stofgennemgangen*** *fra Karstens side?*

1. Jeg synes at det var godt, men der var for lidt. Man fik ikke nok. Så når man kom til vores projekter manglede man noget matematik som man kunne relatere til.

2. Jeg synes, at det var en udmærket gennemgang, når der altså var tavleundervisning. Det var fint når vi havde læst noget hjemme, som vi så fik gennemgået i skolen. Værre var det når vi selv i grupper skulle gennemgå stoffet, for så lavede vi for lidt.

3. Jeg synes at den måske er for hurtig og overfladisk. Vi er tit på røven når vi skal aflevere opgaver.

4. Denne var OK, men vores manglende rutine i bogstavregning gjorde at det var svært for os at forstå.

5. Selve gennemgangen har været fint nok, men tidsmæssigt har det været lidt et pres at skulle nå at blive fortrolig med de forskellige regneformer.

6. Jeg synes ikke at undervisningen har været struktureret nok. Der har manglet gennemgang af de opgaver vi har haft for hjemme.

7. Jeg mener den var for ustruktureret. Tiden blev efter min mening udnyttet for dårligt. Der skulle have været mere "firkantet/gammeldags" undervisning, hvor kravet om at vi lavede lektier var større. Jeg ved godt det ligeså meget er os selv der har ansvaret for at lære, men jeg formåede uden at lave lektier i to år alligevel at følge med, fordi vi så i stedet lavede det i skolen, og der mener jeg Karsten burde være gået videre. I det hele taget lavede vi som sagt for få øvelser, og manglede derfor rutinen når vi skulle bruge det i projektøvelserne.

   Tit synes jeg også at vores lektier har været meget sværere. Ofte fik vi forholdsvis lette opgaver i skolen hvorimod vores lektier var meget sværere. Det ville have været godt hvis vi havde fået flere øvelser for som så kunne være blevet gennemgået næste time, i stedet for at ingen havde lavet lektier fordi det var for svært. På den måde mister man hurtigt motivationen.

   Specielt forløbet (i 1. halvår af 2.g) hvor vi både skulle lave projekt og "lære os selv" diff. regning manglede der struktur. Selve tanken mener jeg er meget god, men det er svært selv at styre vægtningen af de to ting og svært når man ikke får samlet op på det man skulle lave. Projektet får hurtigt al opmærksomheden. Det ville have været bedre hvis man havde haft lidt klasseundervisning engang imellem hvor der kunne blive samlet op på diff.regningen så folk kunne stille spørgsmål osv. Dermed havde man også vægtet denne del højere. I stedet gled det klart i baggrunden for projektet.

8. Det har fungeret godt – men for løst. Det ville være rart med nogle flere opgaver der herefter rettes i næste time.

9. Generelt synes jeg, at gennemgangen har været helt fin, men i og med at vi ikke har trænet den efterfølgende, er det svært at huske, når man skal anvende det igen.

10. Vi har været gennem det væsentlige, men har ikke haft lang tid nok til at indøve det, så vi har glemt den teori vi har lært ret hurtigt igen.

11. Som jeg har sagt før synes jeg der var for lidt tavleundervisning. Jeg følte ikke altid vi var færdige med en slags matematik før vi gik videre til noget nyt.

12. Karsten var god til at forklare problemerne og jeg kunne godt lide tavleundervisningen – der følte jeg at jeg lærte noget. Problemet var at der var alt for lidt af det.

13. Jeg synes, at den har været lidt ustruktureret, jeg synes i hvert fald ikke at den har været optimal. Men okay, generelt synes jeg heller ikke, at vi var gode nok til at læse til timerne, ofte var der mange der ikke var ordentlige forberedte, og det gik selvfølgelig ud over gennemgangen.

14. Dette er et af de spørgsmål jeg ikke føler mig i stand til at besvare objektivt.

15. Jeg synes der var for lidt, og at det var meget svært at få styr på. Jeg synes ikke den var alt for god, man burde have stillet spørgsmål, men det var ofte svært at sætte fingeren på det der var ens problem og få det formuleret til et spørgsmål. Jeg synes det var svært at følge med i gennemgangen, da der blev hoppet meget rundt på tavlen.

16. Eventuelt for hurtigt, vi er fløjet hen over nogle af emnerne. Manglende opgaver til eleverne under gennemgangens pauser!

17. Mere opgaveregning for tavlegennemgangen var lidt sej.

18. Nogle gange var gennemgangen ikke helt som man godt kunne tænke sig. Der var tider hvor det blev forsømt.

19. God! Dog kunne Karsten have været grundigere med gennemgangen af stoffet til dem der ikke fattede det første gang.

20. Nogle gange skete det at vi gik i gang med noget og så midt i det hele stoppede vi og gik i gang med noget andet. Det har været både forvirrende og dårligt!!!!!!!!!!!

21. Vi har i tidernes morgen ikke gennemarbejdet de mange afleveringer som vi har lavet. Dette skulle der have været brugt mere tid på og derfor har stofgennemgangen ikke været helt optimal.

22. I nogle tilfælde kom gennemgangen for tidligt fordi vi først fik de matematiske redskaber sent og derfor kun havde kort tid til at kigge på opgaverne med de "rigtige" matematiske midler. Dette gjorde at man i nogle tilfælde stod hurtigt af!!

23. Det kan jeg ikke huske…

24. Den var elendig…jeg mener jeg uddybede det før.

25. Igen synes jeg det var meget svært og forvirrende.

Hvad synes du om de ***opgavetyper*** *der er blevet arbejdet med? Var der for meget/lidt af bestemte typer?*

1. Jeg synes generelt opgaverne har været gode, lige en enkelt som måske skulle nævnes var vores eksamen. Hvilket jeg egentlig synes var ret ærgerligt eftersom der efter min mening havde været gode opgaver.

2. Jeg synes at der var et passende antal problemopgaver. Derimod øvede vi alt for lidt på opgaver uden hjælpemidler, dem ville jeg gerne have været mere sikker i til eksamen.

3. Jeg er faktisk begyndt at savne problemopgaverne. Dem var der mange af i starten, men nu ser man dem næsten ikke mere. Blækregningerne har intet med vores forsøgsmatematik at gøre længere.

4. Jeg synes, at der manglede normale opgaver. Men de nye var langt mere motiverende.

5. Der har været en fin fordeling af opgavetyper. Den tid der har været at gøre [godt] med er blevet brugt fornuftigt efter fordeling.

6. Der har været for få øvelser med henblik på skriftlig eksamen. Projekterne har taget for lang tid, hvilket er gået ud over øvelserne. Problemopgaverne har der været ok med. Projekterne har været de mest spændende.

7. Der var for få øvelser (eller slaveopgave). Den træning manglede. Her mener jeg både opgaver uden hjælpemidler, men også opgaver som dem man får på de normale matematikhold, hvor selve den matematiske metode læres. Selve projektopgaverne (eksamensopgaverne) synes jeg egentlig vi fik trænet rimelig meget – der er det mere en måde at tænke på man skal lære og ikke så meget noget matematisk, hvilket er svært; men jeg synes de fleste af [os] nåede at lære det.

8. Som ovenover synes jeg at der har været for få almindelige afleveringsopgaver (for på den måde få en mere klar ide om hvad denne form for matematik kan bruges til). Derimod har projekterne fungeret fint og været spændende, men har dog varet i for lang tid.

9. Der har været for lidt tid til at løse flere opgaver indenfor samme teoriområde pga. projekterne.

10. Der var en jævn fordeling af de forskellige opgavetyper, men vi har ikke fået tilstrækkelig mange af hver.

11. Jeg synes det var nogen gode opgavetyper vi arbejdede med og det var fordelt meget godt.

12. Opgaverne var fine, men der var bare for lidt af alt det vi havde i 2.g.

13. Jeg synes, at der har været for lidt færdighedsopgaver, i nogle rapporter var det simpelthen færdigheden man manglede for at løse problemet.

14. Det var en fin vægtning mellem opgaver fra bøger og så problemopgaverne. De almindelige rutineprægede opgaver for at få stoffet banket på plads, og så de mere udfordrende opgaver bagefter synes jeg fungerede godt.

15. Opgavetyperne endte da vist med at blive meget gode, da vi først fik det justeret til en passende sværhedsgrad.

16. For få færdighedsregninger. Måske kunne lette opgaver i starten af et nyt emne [være en ide] dernæst gradvist sværere så alle kommer med.

17. Personligt kan jeg bedst lide problemopgaverne. Der får man lov til at tænke og løse dem på sin egen måde… fin fordeling.

18. Det har været okay.

19. De var passende.

20. De opgavetyper vi arbejdede med har været gode…

21. Ved de forskellige opgavetyper har fordelingen været rimelig.

22. Okay fordeling, men niveauet var lavere på de opgaver som [der] blev arbejdet med i skolen i forhold til dem der blev givet for som blækregning, hvilket efter min mening burde være omvendt idet man i skolen har mulighed for at snakke sammen om opgaverne hvor blækregning i større omfang er individuelt.

23. For det meste var det nogle meget gennemtænkte og velformulerede opgaver, og jeg mente altid at finde en løsning på dem, men der var ikke så meget matematik i mine løsninger, hvilket også afspejler sig i min karakterbog.

24. For lidt færdighedsopgaver.

25. Mange af dem var gode. Jeg kunne godt lide dem der blev brugt i prøverne, mens de opgaver "normale" klasser også får bryder jeg mig ikke om.

*Hvad synes du om balancen mellem hvor meget I som elever bestemte over arbejdsprocessen og hvor meget Karsten bestemte: Var der for meget/lidt **deltagerstyring/lærerstyring**?*

1. Den del har været lige som den skulle være, blot taget i betragtning at der manglede lidt tavleundervisning. Hvis man havde lagt lidt mere tavleundervisning til og så delt resten af tiden som vi gjorde ville det have været perfekt.

2. Der var for lidt lærerstyring, for vi var ikke seriøse nok, når vi skulle sidde og gennemgå stoffet selv. Især hvis det ikke blev gennemgået bagefter.

3. Karsten er god til at lytte til os, så der er ikke rigtigt problemer her.

4. Den var fint afbalanceret. Det meste var lagt over til os.

5. Arbejdsprocessen er gået nogenlunde efter deltagerstyring, men de deadlines der bliver sat fra Karstens side satte en strammer.

6. Vi har nogen gange fået lov til at trække grænserne lidt for langt. Hvis noget passede os dårligt, så udsatte vi det bare... Fedt i situationen men bagefter kan man godt se at de projekter trak alt for langt ud.

   Da vi skulle lære f.eks. differentialregning var det ikke fedt med så meget deltagerstyring da stoffet var så svært, og kom du i en gruppe hvor du var den stærkeste elev var du lidt lost hvis du ikke forstod noget.

7. Jeg synes at vi som elever fik lov til at styre for meget på en måde der ikke var særlig konstruktiv. Der var for ofte hvor vi fik lov at få flere timer til projekter fordi vi ikke lige var færdige (hvilket oftest skyldtes at vi havde været for ukoncentrerede i starten af forløbet).

8. Vi har til tider fået “lov” til at udsætte afleveringer hvis vi ikke blev færdige (i det øjeblik var det rart, men i længden var det med til at gøre projekterne lidt langtrukne). Derudover har fordelingen sådan set været god nok – måske er der brug for lidt mere tavleundervisning.
9. Set i bakspejlet synes jeg, at vi elever har haft for stor indflydelse på visse punkter. Dette har sikkert også været årsagen til at tidsplanen ikke helt holdt til sidst i forløbet.
10. Vi har haft for stor indflydelse indimellem, som fx udsættelse af projektafleveringer, så de skred for lang tid.
11. Selvfølgelig var [det] godt vi var med til at bestemme arbejdsprocessen, men jeg synes godt der kunne havde været lidt mere lærerstyring. Det var lidt for rodet nogen gange.
12. Karsten skulle have bestemt mere, jeg er sikker på at alle dermed var blevet mere engagerede.
13. Umiddelbart synes jeg at Karsten skulle have taget mere styring, have været hårdere og slået hårdere ned hvis vi ikke kunne vores ting. Processen blev for meget styret af dem der ikke havde lavet og ikke kunne deres ting. Det er selvfølgelig let at sidde og sige nu, men jeg tror faktisk det ville have hjulpet i vores tilfælde som klasse.
14. Det er svært at svare på – umiddelbart tror jeg ikke jeg har noget at brokke mig over.
15. Har jeg lidt svært ved at overskue. Som jeg umiddelbart ser det, så bestemte læreren emnerne og det var også ham som vægtede hvad slags undervisning vi fik mest af, selvom vi da blev spurgt. I grupperne var det os selv der styrede mest.
16. Ok balance mellem deltager/lærerstyring!
17. Der har jeg ingen indvendinger, den har været fin synes jeg!
18. Det har været helt fint.
19. Det er en lækker arbejdsform, når vi som elever også har noget at skulle have sagt. Men det kræver meget ansvar af den enkelte elev.
20. Karsten har ladet os bestemme lidt for meget, f.eks. med afleveringer, vi har ikke afleveret dem til tiden som vi skulle. . .
21. Vi har på mange områder haft for meget indflydelse og Karsten burde have været hårdere i langt flere tilfælde, fordi vi mange gange helt selv kunne bestemme hvad vi ville lave.

22. Som nævnt blev det styret af efter min mening for hurtig gennemgang af opgaverne efter de tilstrækkelige midler var givet. Ellers ok.
23. Karsten var god til at snakke med os og høre hvad vi havde lyst til at beskæftige os med, men ikke så meget at han mistede autoriteten.
24. Jeg synes måske at vi havde for meget medbestemmelse. Jeg kan godt lide at noget er fastlagt på forhånd, og at der er et konkret program som skal følges.
25. Det var helt perfekt. Vi kunne tale med Karsten hvis der var noget vi var uenige om med henhold til planlægning og tidsfordeling.

Specielt om projektdelen
Med projektdelen menes den del af undervisningen der har bestået i en række projektarbejder, som alle blev afsluttet med afleveringen af en rapport.

Hvad synes du om ***måden de enkelte projektforløb blev igangsat på****?*

1. Jeg synes at vi havde en god gennemgang inden hvert projekt. Omkring hvilke kompetencer der skulle tages i brug. Derudover synes jeg at det var dejligt at man nogle gange selv kunne vælge sine projektgrupper, hvilket gjorde det sjovere og mere behageligt at lave projektet.

2. Det var fint. Vi fik at vide hvilken kompetence det var og fik et eksempel på hvad vi kunne lave. Men det var alligevel ofte svært at komme i gang, men det var mest problemer med at finde emnet. Det var faktisk rigtig godt, da vi inden nummer to projekt fik et papir med en masse forslag til emner.

3. Helt fint! Eneste rigtige problem har været at finde et emne – måske flere eksempler fra Karstens side?

4. Hvert projekt blev startet med en god præsentering af emnet, og vi fik et par dage til at danne os et billede af projektet.

5. Under opstart af nyt projekt er opgaven skredet meget langsomt frem indtil man kom ind og havde noget materiale (fx et eks.) som kunne danne grunden for opgaven.

6. Jeg synes at starten altid var meget svær! Hvor skulle man starte og hvor skulle man ende! Det var især svært når det ikke handlede om modellering! Derfor var [det] godt med nogen af de der idésedler.

7. De har været gode fra lærerside. Det er bare svært at starte på et projekt. Det er svært at finde et emne fordi man i princippet kan vælge stort set alt. Man forsøger at finde noget der lyder spændende men samtidig vil man gerne have at emnet indeholder tilpas svær matematik, men stadig er til at løse og at problemstillingen faktisk er til at få et resultat ud af som siger noget. Derfor søger man meget på må og få, hvilket er svært at undgå. En måde er at læreren kommer med en række forslag men så mangler der lidt af "opstarts"-diskussionerne.

8. Det har generelt været svært at komme i gang da der er mange ting man lige pludselig har brug for at have styr på. Det ville være rart med et par timer til at snakke i gruppen og gangen efter flere timer til at finde flere materialer.

9. Det har været nogle fine oplæg til projekterne fra Karstens side.

10. Man fik ridset fint op hvad forskellen på projekterne var, men nogle gange brugte vi for lang tid før vi kom ud i grupperne.

11. Selve igangsætningen synes jeg var god nok. Der forklarede Karsten os de forskellige projekter fint.

12. Projekterne var fine og vi blev gode til at lave dem. Dog var perioderne med projekter utroligt stressende. Mat/fysik-projektet blev meget uoverskueligt, og lærerne var for meget fraværende til at vi kunne få den fornødne hjælp.

13. Projekterne var fine og vi blev gode til at lave dem. Dog var perioderne med projekter utroligt stressende. Mat/ Fysik projektet blev meget uoverskueligt, og lærerne var for meget fraværende til at vi kunne få den fornødne hjælp.

14. Det fungerede meget godt at man startede med at få noget introduktion til den kompetence man skulle til at beskæftige sig med, men der var altid en del forvirring i starten mht. gruppedannelser og valg af emne.

15. Som tidligere nævnt, synes jeg der var for meget forvirring i starten, fordi man ikke vidste hvor man skulle hen, hvilket resulterede i at vi blev forsinkede og gav os endnu mindre tid til andre ting.

16. Det var godt at få en appetizer (seddel med forslag, da det godt kunne være svært at komme i gang). Det gode er at man selv vælger noget man har interesse for, når man skriver rapporterne.

17. Det er en god ting at eleverne selv er med til at bestemme hvad og hvordan deres projekt skal udformes.

18. Det har været okay.

19. God!

20. I 1.g var vi alle sammen meget konc. men som vi kom i 2.g blev det værre... vi var ikke nær så konc. som vi havde været...

21. Karsten kom med eksempler på projekter og det var en yderst positiv måde at gøre det på.

22. Ok, men timerne blev i for stort omfang klattet væk pga. store pauser mellem de afsatte timer.

23. Nogle af projekterne kunne godt trække lidt for langt ud. Hvis vi fik 4–5 uger til et projekt, så arbejdede mine grupper kun i 1–2 af dem, resten af tiden var ren hygge. Det skyldes nok også at for at kunne lave et sådan projekt, skal elevernes arbejdsmoral være høj og det har min aldrig været.

24. Jeg har det som om at rapporterne blev sat i gang i et lidt for højt tempo. Jeg synes ikke vi fik lært nok om det ville skulle skrive om inden at vi skulle i gang med at skrive. Der er nok derfor vi skulle bruge så meget ekstra tid til skrivningen. Fejlen er nok den at Karsten skulle lære hver enkelt gruppe, det han kunne have gjort i klasseundervisning.

25. Jeg kunne godt lide at vi selv skulle finde [et] emne hvor vi kunne relatere til emnet fra hverdagen. Ølemballage osv...

Hvad synes du om ***gruppearbejdet*** *undervejs i projekterne?*

1. Generelt godt men nogle folk havde en tendens til bare at smutte lige efter man var blevet inddelt i grupper og derefter efterlade alt arbejdet til resten af gruppen.

2. Det skete ofte at man var i gruppe med nogle, der ikke lavede en skid. Når vi selv skulle skrive rapporten var det dem selv det gik ud over, men når det var grupperapport var det mere os andre byrden blev lagt over på. Men hvis man var i en god gruppe, hvor alle gad hjælpe, lykkedes det ofte at få helt styr på tingene inden skriveriet.

3. Helt fint, jeg har ikke oplevet problemer, men det har de andre vist.

4. Dette har fungeret OK, men arbejdsindsatsen svingede fra gruppe til gruppe.

5. Arbejdet i grupperne er mest knyttet sammen halvvejs under gruppedelen, da man i start og slut mere sidder i egne tanker. I starten tænker man meget på hvad opgaven skal omhandle og til slut tænker man på hvordan ens egen rapport skal udformes.

6. Det har været svært nogen gange, især med de tvungne grupper fordi det meget er de samme der gider lave noget og de samme der ikke lavede noget som helst. Derfor endte det nogle gange med at man lavede hele projektet selv og så bare udleverede resultaterne til de andre. Det gjorde det ret frustrerende når de så fik en højere karakter end en selv på trods af at jeg havde mere matematik med i min opgave, derfor synes jeg at de sproglige formuleringer har haft en tendens til at tælle for meget.

7. Jeg mener at jeg hver gang er endt i nogle gode grupper, der har været rimelig varierede. Men igen er det en svær del af projekterne fordi læreren tit ønsker nogle rimelig jævne grupper mens vi som elever mest søger sammen med nogle vi arbejder godt sammen med hvilket oftest har noget med ambitioner at gøre. Derfor ender det tit med at de stærkeste ender i samme gruppe. Det er enormt vigtigt at en gruppe arbejder godt sammen, hvilket ikke nødvendigvis har noget med dygtighed at gøre men derimod

kræver samme ambitionsniveau for alle i gruppen. Og det har været et problem for andre når grupperne er blevet bestemt af Karsten.

8. Det har været fint i de timer hvor Karsten var på skolen, men i de timer hvor han ikke var der [har det ikke fungeret så fint] – især i starten af forløbet. I slutningen var det mere individuelt.

9. Det har været meget afhængigt af, hvilke ambitioner de andre i gruppen har haft. Men alt i alt har det fungeret godt.

10. Gruppearbejdet er blevet bedre, og der var en fin veksling af selv at måtte danne grupper, og blive sat tilfældigt sammen. Det var selvfølgelig problematisk hvis man kom i en gruppe der ikke fungerede, for det er et meget stort arbejde at lave et helt projekt alene, hvilket man godt kunne føle, hvis de øvrige gruppemedlemmer ikke var lige så engagerede.

11. Det kom selvfølgelig an på gruppen, og nogen gange var vi nok ikke helt så koncentrerede. Men jeg synes gruppearbejde er en god måde at arbejde på.

12. Det fungerede godt, og har styrket os som klasse.

13. Gruppen var selvfølgelig meget afgørende for hvordan den endelige rapport blev. Jeg kan generelt godt lide gruppearbejde, men jeg ved nu mere end tidligere at gruppen er meget afgørende for hvad jeg synes om gruppearbejde. Jeg har både siddet i grupper hvor det hele bare kørte og i grupper hvor jeg synes at det altid var mig der skulle sige: "Nu skal vi altså i gang..." Hvis jeg sad i grupper som den sidste, så synes jeg at gruppearbejdet var hårdt, og det var frustrerende at de andre i gruppen ikke ønskede det samme som mig. Hvis jeg sad i gruppe som den anden slags, hvor det hele bare kørte, synes jeg ikke at der var noget bedre end gruppearbejde. Der var ikke noget bedre end når man vidste, at det vi sad og lavede var godt – vi havde en masse "arhhha-oplevelser", der faldt flere og flere prikker på plads. Vi gav hinanden godt modspil, samtidig med at vi hjalp hinanden.

14. Hvordan gruppearbejdet fungerede afhang naturligvis meget af hvor godt man kunne samarbejde med de andre, men for det meste gik det fint. Og hvis man var havnet i en gruppe hvor man ikke følte at det var så let at samarbejde, så kunne man jo nøjes med at lave det absolut nødvendige i gruppen og så gå hver til sit med den individuelle rapport.

15. Jeg synes gruppearbejdet var fint nok, men det afhang jo også meget af hvilken gruppe man var i og hvor godt man arbejdede sammen.

16. Alt afhængig af hvem man var sammen med gik det godt. Dog var der meget spildtid i skolen pga. kun 1 lærer, men det blev så kompenseret

derhjemme. Det er meget op til det enkelte individ at tage ansvar for at få lavet noget i gruppen!

17. Det sker at man skal have et spark eller en hjælpende hånd for at komme videre. Men det er jo nok fordi vi ikke helt kan alt selv!

18. Helt fint.

19. Hvis man kom i en gruppe hvor motivationen og de faglige kompetencer [var] i orden, så gik det jo fint nok. Hvis dette (i enkelte [tilfælde]) ikke var tilfældet, MEGET dårligt! Men det siger jo ligesom sig selv.

20. Nogle gange var man aktiv i de grupper og andre gange sad man og ja...

21. Godt gruppearbejde, men alligevel ofte for meget spildtid, pga. problemer med projekterne.

22. Meget afhængigt af ens gruppe! Men tendensen var at man brugte for langt tid på at komme i gang hvis man eks. kun fik en time efter at have holdt pause i et par timer.

23. Karsten var god til at snakke med os og høre hvad vi havde lyst til at beskæftige os med, men ikke så meget at han mistede autoriteten.

24. Det var godt nok. Der var som der altid vil være gode og dårlige tider. Dertil skal det også siges at jeg personligt godt kan lide at arbejde i grupper.

25. Tit var det for useriøst, Karsten var ikke nok over os og brugte for lang tid på den enkelte gruppe mens de andre sad og kunne ikke komme videre med rapporten.

Hvad synes du om **vejledningen** *fra Karsten?*

1. Den har været god fordi han altid var i nærheden til at spørge. Dog har han måske undervurderet vores klasse og ikke holdt så meget opsyn som han måske burde, fordi vores klasse virker ret arbejdsvillig når man ser den, men når vi er alene sker der pluseligt et eller andet som gør at folk ikke gider at yde en indsats. Dette skete heldigvis kun til tider men lidt mere opsyn kunne der godt have været. Derudover var der jo også den episode med at Karsten flyttede til Fyn hvilket gjorde det en del sværere at få fat i ham når det nu engang galt. Men ellers var der ikke problemer.

2. Det var godt når han var der til at spørge, men da han boede langt væk, var der meget ofte, hvor han ikke var der så tit. Det gjorde, at når han endelig var der, skulle alle bruge ham og så var det svært at komme til. Det hjælper jo altid når der er en man kan spørge, hvis der er noget man er i tvivl om. Og han sørgede også for at vi holdt os til kompetencen og hentede bøger til os.

3. Ok! Der har dog været eksempler hvor han under projektarbejdet har givet os forslag til udregninger og derefter kritiseret det i rapporten, som værende irrelevant.

4. Nogle gange svær at forstå da vi arbejdede med nye begreber/kompetencer.

5. Som nævnt er opgaverne ment til at være frie indenfor en kompetence.

6. Vejledningen fra Karsten har været ok, når han har været på skolen. Det er kun den personlige vejledning man kan bruge til noget. Vejledning gennem telefon og e-mail er svær. Men det var fedt at vi havde en hjemmeside, hvor vi altid kunne gå ind og tjekke hvad vi havde for og hvad det næste emne var og hvornår det næse projekt skulle afleveres og hvad planen for de næste timer var.

7. Jeg synes den har været rigtig god. Han virker altid som om han er interesseret og gider sætte sig ind i de forskellige ting. Han har virket som om han havde en fornemmelse af hvad man lavede i alle grupperne.

8. Det har hjulpet en del, men igen var det svært når han ikke var der.

9. Jeg synes, at den har været fin, men jeg må indrømme, at det har været problematisk at han kun har været på skolen 2 dage om ugen.

11. Nogen gange synes jeg det var lidt svært at få de svar man søgte.

12. Fin, men igen skulle han have været lidt strengere, han var simpelthen for "sød".

13. Generelt synes jeg, at den har været god. Umiddelbart er det eneste problem der er knyttet til det at det nogle gange kunne være svært for Karsten at få tid til alle. Vi sad altid spredt rundt på hele skolen, og hvis man ikke lige vidste hvor Karsten var kunne det derfor nogle gange være umuligt, hvilket kunne betyde at man sad med et spørgsmål i længere tid.

14. Dette er vist endnu et af de spørgsmål jeg vil undlade at besvare.

15. Jeg synes ofte den manglede (okay han havde jo også travlt når der var så mange grupper der skulle bruge ham på en gang, men det var et problem). Til tider virkede den også lidt forvirrende.

16. God når det var muligt at få hjælp. Som nævnt i ovenstående svar er der jo 5–8 grupper og han kan ikke være alle steder på en gang!

18. Nogle gange virkede det som om vi blev forsømt og det har være ærgerligt at han nogle gange ikke var på skolen når vi var midt i et projekt. Har måske også nogle gange været lidt løs. Ellers ok.

19. Personligt skulle jeg nok have været mere opsøgende, men det var svært da Karsten i en periode ikke var til stede på skolen så meget.

21. Karsten havde svært ved at hjælpe pga. klassens størrelse og det meget arbejde der skulle lægges i hver gruppe.

22. God, men i nogle tilfælde blev man måske ledt lidt på vildspor pga. hans manglende viden inden for fysik (brødet blev slået for stort op).

24. Jeg ved ikke hvad der menes med spørgsmålet???

25. Det var rart at få nogle start-idéer som vi kunne bruge til at vælge emner. Det var nogle gode forslag hvori man kunne tage udgangspunkt til sin opgave.

Hvad synes du om balancen mellem hvor meget I som elever bestemte over arbejdsprocessen og hvor meget Karsten bestemte: Var der for meget/lidt ***deltagerstyring/lærerstyring****?*

2. Det var fint at vi selv styrede hvad vi ville skrive om og hvordan emnet skulle afgrænses, så Karsten kun stillede krav om kompetencen. Men det lykkedes ofte os elever at få trukket arbejdsprocessen ud, så vi fik længere tid, hvilket gik ud over tid til undervisningen. Der skulle han nok have været mere skrap.

3. Helt tilpas!

4. Den var igen helt OK.

5. Selve processen er nogenlunde blevet efter gruppens tempo og Karsten er kommet med vejledning til hvordan tiden skal holdes.

6. Der var nogen gange for meget deltagerstyring, hvilket der var nogen der ikke helt kunne styre. Det resulterede i at rapporterne tog for lang tid og nogen intet fik lavet.

7. Igen meget som tidligere i slutningen af projektet har vi fået for meget negativ indflydelse, men inden starten på et nyt projekt mener jeg Karsten her gjort det på en god måde ved at inddrage os i hvordan timerne skulle fordeles.

8. Til tider har der været for meget elevstyring da vi ofte har fået lov til at udsætte afleveringsfristen, men derudover (mht. projekt) var der en god fordeling.

11. Karsten kunne nok godt have gået ind og taget lidt mere styring nogen gange. For det første så vores rapportforløb ikke blev for langt og for det andet så vores gruppearbejde blev lidt mere koncentreret. Men selvfølgelig var det også rart at vi var med til at bestemme lidt af arbejdsprocessen.

12. Mere lærerstyring med hensyn til overholdelse af tider og aktivitet i timerne.

13. Jeg synes, at vi som elever var meget frit stillet, og at Karsten for det meste var åben for andre muligheder, hvis der var nogle. Hvis man havde et problem, kunne man komme til ham (hvis man ellers kunne finde ham) og så ville han hjælpe gruppen med at komme videre i opgaven.

14. Umiddelbart vil jeg sige at det fungerede fint.

15. Jeg ved det ikke helt.

16. Selvfølgelig fik vi en kompetence vi skulle gå ud fra, men ellers synes jeg at vi styrede det meget selv! Han kom med ideer til ex. diff. regning mm., men vi styrede det selv!

17. Nogle gange gik Karsten ind og bestemte lidt for meget så ens projekt fik en anden drejning end man egentligt havde tænkt sig!

18. Helt fin.

19. Karsten skulle have været meget mere bestemt og streng. For meget elevstyring var skyld i for sent afleverede opgaver og et alt for slapt arbejdsmiljø.

21. Vi havde for meget indflydelse, hvilket er både positivt og negativt. Positivt fordi man lærer meget af at have meget indflydelse, men negativt fordi Karsten burde presse os langt mere i sin retning.

22. Opgavevalget var jo næsten helt frit så på den måde var det super. Men vi fik måske for stor accept til at udskyde afleveringen af rapporter i stedet for bare at få dem lavet til det fastsatte tidspunkt.

24. Igen for meget elevbestemmelse. Et eksempel: hvis vi ikke syntes vi havde nok tid, så fik vi bare noget mere. I stedet burde han i de mulige tilfælde have sagt at vi kunne arbejde noget hårdere.

25. Nej det har jeg ikke noget imod nu. Men under gruppearbejdet kunne man da godt blive lidt irriteret over at Karsten ikke ville høre efter hvad man sagde. Efter projektet kan man godt se at hvad han gjorde og sagde egentlig også var det bedste.

Om matematisk modellering

En vigtig del af forsøget har bestået i at forsøge at hjælpe jer med at blive bedre til matematisk modellering, hvilket er grunden til at vi nu spørger specielt til det.

Hvad forstår du ved ***matematisk modellering****?*

1. Umiddelbart ville jeg sige en matematisk opgave hvor den umiddelbart er så åben at man selv kan trække de paralleller som man synes er mest relevant. Dette gør at det er en selv og ikke en bog der finder frem til svarene.

2. At man tager en del af virkeligheden og finder noget matematik, der kan bruges til at regne på den.

3. At man finder en model/ligning/formel til at løse et problem.

4. At man tager et virkeligt problem og afgrænser dette, så vi få et enkelt sæt regler for problemet. Disse regler beskriver vi matematisk og løser problemet den vej.

5. En matematisk modellering er et matematisk svar på spørgsmål. En model kan omfatte en optimering af en ting vi kender fra samfundet i dag. Man svarer ved hjælp af matematikken og beviser en evt. påstand.

6. Matematisk modellering betyder at kunne formulere et konkret problem matematisk, dvs. opstille en matematisk model over problemet og derefter løse problemet.

7. Matematisk modellering er evnen til at overføre et “virkeligt” problem til en matematisk problemstilling og så løse denne i matematikkens verden, for derefter at føre den tilbage til det “virkelige liv”.

8. At kunne opstille et problem for derefter at løse det vha. at opstille en model over problemet.

9. At finde en forklaring/løsning på et problem man har taget fra virkeligheden. Processen går ud på, at tage et problem fra virkelighedens verden, og føre det over i matematikkens verden. Derefter finder man løsningen og fører det derefter tilbage til virkelighedens verden.

10. At finde en matematisk løsning på et virkeligt problem, og fremstille en model på løsningen af problemet vha. matematikken.

11. Man tager et problem ud fra hverdagen og finder en matematisk model til at beregne det.

12. At kunne modellere/opstille en model baseret på tal fra virkeligheden og derefter gå tilbage til virkeligheden og se om modellen er realistisk, og hvilke fejl og mangler der kan spille ind.

13. Herved forstår jeg, at man tager et problem fra virkeligheden, man er ikke i stand til at finde en løsning i virkeligheden, så man fører problemet over i matematikken. Her løses problemet hvorefter det føres tilbage til virkeligheden. Derudover har det også noget at gøre med at opstille modeller, som gør det muligt at løse en givet problemstilling.

14. At man tager et problem fra virkeligheden, laver det om til matematik og derefter fører det tilbage på virkeligheden.

15. At vise på fx med en graf en udvikling. Eller bare med en eller anden model vise, det dit emne drejer sig om, så man kan tage udgangspunkt i denne model.

16. At jeg får stillet et problem, som jeg dermed skal løse ved en formel jeg enten kender eller selv må finde ud af. Ex. selv addere et led i en formel. (ex. luftmodstand eller lign.)

18. Problem fra virkeligheden til at lave matematisk model af det til igen at bringe det ud i virkeligheden.

19. At tage et problem fra virkeligheden, matematisere det, finde en passende matematisk model, og herefter bruge den til at løse det oprindelige problem.

20. opstille en matematisk model som man kommenterer og kritiserer i rapporten.

21. Find en model og gennemarbejd den på alle leder og kanter. For dernæst [at] se om den holder i virkeligheden.

22. En måde hvorpå man finder en matematisk måde at løse en opgave.

23. Det er hvis man får en opgave, hvor der skal bruges noget mat. vi ikke har lært, så skal vi i vores klasse kunne finde ud af at samle regnemåder og formler fra mat. vi har lært og sætte det sammen, så det kan bruges til at udregne den opgave.

24. Jeg vil undlade at svare på de næste spørgsmål om matematisk modellering. Jeg mener ikke at jeg kan komme med et kvalificeret svar.

25. At opstille en matematisk problemstilling om et dagligdags emne der kan løses ved hjælp af matematik. Om det er hældning eller rumfang eller bremselængde.

*Er der ting i forbindelse med matematisk modellering som du i særlig grad synes du er **blevet bedre til** eller er kommet til at **vide mere om** i løbet af de to år?*

1. Ja, jeg synes jeg har fået et bredere syn af muligheder på resultater.
2. Jeg er blevet bedre til at løse en opgave, som jeg ikke har set før, ved at finde min egen metode til den.
3. Jeg er blevet bedre til at komme med ideer til en model, men den er som regel forkert. Jeg synes ikke at jeg er blevet særlig "stærk"til det.
4. Til at finde ud af hvad problemet i virkeligheden er og hvordan man skal gribe det an.
5. Jeg synes jeg er blevet bedre til at finde kernen i opgaven og finde løsninger på åbne opgaver. Det er tilmed lettere at se sammenhæng mellem matematik og dens anvendelse i samfundet.
6. Jeg mener at jeg er blevet bedre til hovedsageligt at kunne opstille problemer matematisk med afgrænsninger.
7. Jeg er blevet meget bedre til at opstille problemstillingen. Min evne til at systematisere et problem og udnytte matematikken mener jeg også er blevet styrket.
8. Jeg er blevet bedre til at vide hvilken form for matematik, der skal til for at løse et bestemt problem, og at afgrænse dette.
9. Vi er blevet meget bedre til at gribe et problem an, selvom vi ikke vidste, hvordan vi skulle løse det og hvilken matematik vi skulle bruge.
10. Brug af grafer til at underbygge ens projekt, og virkelig sætte pris på hvor meget man kan få ud af dem. En acceptering af, at man ikke kan løse alle problemer med den matematik man havde regnet med at bruge – men at det at overveje en løsning også er givtigt.
12. Hvordan de fleste ting i naturen/vores hverdag kan beskrives via matematiske modeller og hvordan det kan være at det er sådan.
13. Jeg ved ikke rigtig hvad jeg skal svare til dette spørgsmål.
14. Jeg er overbevist om at det er lettere for mig at løse en modelleringsopgave end for de elever der ikke har deltaget i dette projekt.
15. Jeg synes da helt klart jeg har fået et bedre overblik med at arbejde med grafer, og se fordelen ved at bruge dem, da man ofte bedre forstår problemet, når man ser det på den måde.

16. Ja, at lave egne formler og løse problemer med en form for matematik, som man selv må udvikle!

18. Nej, ikke umiddelbart.

19. ??

20. Ja jeg har lært at overføre matematikken til den virkelige verden.

21. Jeg har igennem de 2 år i langt højere grad lært at se matematiske modeller på en anden måde. Det at gennemarbejde dem og forstå dem er jeg klart blevet bedre til.

22. Personligt synes jeg at modelleringsrapporterne var de klart mest givende idet man skulle koncentrere sig om selv at finde en måde at løse et problem på.

23. Jeg kan ikke sige hvad jeg har lært…

25. Jeg blev bedre til at overskue problemet og finde ud af hvor man skulle tage fat.

Hvad synes du er ***det sværeste*** *ved matematisk modellering?*

1. At styre opgaven i den rigtige retning. Arbejdet er jo meget individuelt (uden lærer) og derfor kan man let komme til at trække opgaven i den forkerte retning.

2. Det kan nogle gange være svært at se, hvilke muligheder der er for, at løse en opgave på en kompliceret måde, hvis den umiddelbart virker meget simpel. Naturligvis for at vise matematik på højt niveau. Et problem jeg har haft utallige gange er, at det var lykkedes mig at opstille et så kompliceret udtryk, at jeg ikke kunne få det differentieret. Derved var det umuligt at afslutte opgaven på en flot måde – øv.

3. Det sværeste ved at finde en sådan model er at komme fra problemet og så over til løsningen. Det er svært og tidskrævende.

4. Hvordan man skal beskrive problemet og finde hvilken vej til løsningen man vil bruge.

5. Det sværeste er at finde den mest rigtige eller bedste løsning på en opgave og vælge midler til at forklare modellen så simpelt så muligt.

6. Jeg synes at det sværeste med matematisk modellering er at lave nogle ordentlige afgrænsninger og finde et egnet problem der kan opstilles matematisk.

7. At finde problemstillingen og afgrænse sit emne.

8. Det at finde et problem, der kan skrives meget om, og alligevel afgrænse det, er til tider svært.
9. At finde et område, der indeholder nok matematik.
11. Nogen gange kan det godt blive lidt uoverskueligt.
12. Finde ud af hvad projektet skulle handle om.
13. Umiddelbart ville jeg sige at det sværeste er at finde en problemstilling der egner sig til dette.
14. Det sværeste synes jeg er at gennemskue hvordan opgaven skal løses, men det er samtidig det der er udfordringen og det interessante ved det.
15. Det kommer nok lidt an på hvad man har kastet sig ud i.
16. At komme i gang med en ide til en rapport og måske finde den formel man skal videreudvikle!
17. At når man skal skrive rapporten så skal man skrive så det er den rigtige kompetence. Det var især svært med struktur!
18. Det ved jeg ikke.
19. At være matematisk kreativ. . .
20. Det er der ikke noget [der er], mat. mode. er det nemmeste man kan skrive en rapport om.
21. At opbygge ligningen i modelleringen.
22. Hvis det ikke er muligt at finde en måde kommer man let til at køre i cirkler.
23. Det sværeste ved jeg ikke hvad var, for jeg kan slet ikke finde ud af det. Så noget kunne tyde på at det sværeste var at forstå det.
25. Det er selve matematikken i problemet. Man det er klart nemmere når man kan relatere til hverdagen.

Eksamen

Hvad synes du om **den mundtlige eksamensform***, som vi benyttede til årsprøven efter 1.g.?*

1. God, godt med Tomas som censor fordi han var inde i det vi lavede og havde derfor en viden som andre censorer måske ikke lige kunne sætte sig ind i.

2. Jeg kunne ikke lide den. Jeg vil hellere bedømmes på hvor meget matematik jeg kan, end hvor godt jeg kan flette en bestemt kompetence ind og snakke om græsk filosofi ... Jeg brød mig heller ikke om at høre hvordan i diskuterede min karakter, så det er jeg glad for at man ikke skal normalt.

3. Jeg var ikke så begejstret for den. Jeg havde ikke en klar fornemmelse af hvad jeg skulle forberede mig på. Derfor blev jeg ret "busted" da jeg skulle stå og gennemgå et 3–4 siders langt bevis på pi. Samtidigt kom Karsten til hjælp hele tiden uden jeg havde brug for det. Derfor virkede jeg nok en del dummere end jeg var.

4. En smule for abstrakt. Jeg kom op i kryptering hvilket er et emne, som ikke indeholder megen egentlig matematik, men matematisk tankegang. Jeg manglede noget at skrive op på tavlen.

5. Anderledes, men mere behageligt at være til eksamen på den måde. Der var mulighed for at forsvare sin opgave og rart at blive hørt i materiale man selv havde skrevet.

6. Den mundtlige årsprøve var en rigtig god prøve fordi den afspejlede den daglige undervisning og man tog udgangspunkt i nogle projekter man havde arbejdet målrettet med.

7. Den var god. Det var fedt at få lov til at komme op i sine projekter, fordi det er noget man oftest føler man virkelig har styr på.

8. Det fungerede godt og relaterede sig godt til projekterne.

9. Jeg synes, at det var en behagelig eksamensform. Det var meget rart at man vidste præcist, hvad man kunne komme op i. Jeg kunne godt lide at man fik mulighed for at forsvare/argumentere for den rapport man var kommet op i.

10. Hvis man er godt forberedt er den god, men den er svær hvis man har et projekt der i forvejen var mislykket, og man ikke har fået tænkt videre på det efter man fik det tilbage. Man skulle måske generelt også gennemarbejde et projekt efter man får det tilbage, og sammen med læreren arbejde videre, eller løse de problemer der er opstået.

11. Jeg synes det var en rigtig god ide at komme op i en rapport, det gjorde det mere overskueligt.

12. Den var god, jeg skulle nok have læst på matematikken inden, men det gik jo ok alligevel.

13. Jeg synes, at det var en god eksamensform som vi benyttede i 1.g. Selvom der herskede en del tvivl om hvad vi skulle læse på, sige til selve eksamen osv. Fordelene var at man var inde i stoffet til de enkelte rapporter, selvom det var noget tid siden de var blevet skrevet. Det var også godt, at man kunne vælge en fra...

14. Jeg synes det fungerede fint. Det var rart at man i rimelig vid udstrækning selv kunne afgøre i hvilken retning samtalen skulle dreje sig hen. Jeg er klar over at følgende påstand sjældent ses blandt elever, men jeg mener at der blev givet lidt ved dørene mht. karaktererne. Måske synes jeg at kravene var lidt for lave... Men selve ideen er fin, og i det store hele synes jeg det forløb godt.

15. Jeg forstod virkelig ikke, hvad det var man skulle, selvom man fik lov til at høre hvordan I vægtede karakteren. At bruge tavlen, var heller ikke noget jeg tænkte på, før det blev forslået, da jeg aldrig har været udsat for det før, man brugte det ikke i folkeskolen.

16. Det var en fed form, for man skulle forsvare sin rapport! Det vil sige, det arbejde man havde lagt i den kunne man få mulighed for at forklare andre!

17. Som jeg skrev tidligere så synes jeg at det er en rigtig god måde. Det er også lækkert at man kommer op i kendt stof!

18. Ideen er ganske god.

19. God! Men da min rapport var yderst mangelfuld, blev resultatet ikke så forfærdeligt overbevisende.

20. Det har været godt, jeg synes at det er en god ide at man skal op i rapporter.

21. Den var ret svær, fordi vi ikke havde prøvet den før. Ergo manglede vi øvelse.

22. OK.

23. Mat.eksamen var bare noget der skulle overstås, så jeg havde ikke rigtig læst på det og så kom jeg op i babylonsk mat. og det der åndssvage talsystem.

24. Det ligger langt tilbage, men jeg mener at man skulle have lavet en anden form for eksamen. Selve projektet var jo meget anderledes, derfor synes jeg at man godt kunne have brugt en form som afspejlede undervisningsformen. Måske med en gruppeeksamen. Jeg synes måske at den var lidt for almindelig.

25. Det var OK, men jeg kan ikke egentlig huske min prøve.

Hvad synes du om ***problemløsningsdelen af den skriftlige eksamen*** *som den forløb til omeksamen i august måned?*

1. Jeg var desværre forhindret i at møde op til re-eksamen.

2. Jeg valgte ikke at gå til omeksamen, så jeg kan ikke rigtig udtale mig om den.

3. Ingen kommentarer! :) Jeg havde en ret god fornemmelse af den. Mine svar mindede en del om dem jeg tidligere har fået 9 og 10 for, men sådan gik det åbenbart ikke. Det er som om at rettelserne er forskellige til prøveeksamerne og til eksamerne.

4. Virkede, som alle andre opgaver vi har fået.

5. Det var nogle gode opgaver. Desværre fik vi ikke så meget ud af gruppearbejdet og det var mest i overfladen af opgaven vi lå. Måske var det på grund af perioden uden nogen form for gruppearbejde forinden der gjorde at vi ikke kom så langt.

6. Problemløsningsdelen til omeksamen var gode nok, lidt sværere end de plejer at være, men generelt var de gode nok, da de afspejlede de opgaver vi havde prøvet i undervisningen.

7. Jeg synes opgaverne var meget mere i stil af hvad vi har trænet, hvilket var godt. Problemet ved denne eksamensform er at man (som det skete for mig til denne prøve) nogen gange når til det punkt hvor man lige mangler at løse en ligning eller lign. og så går i stå. Det er efter min mening ikke noget man kan træne sig til at kunne på forhånd. Jeg mener det har noget at gøre med lige at kunne gennemskue det på dagen. Selve delen hvor vi går i grupper er stadig god. Den sikrer at man har noget at gå videre med uden at have en løsning.

   Jeg mener dog stadig at der stadig er lige lidt nok tid i alt. De tyve minutter i gruppe er gode men man er meget presset til sidst i eksamen hvis der har været en opgave man har haft svært ved hvilket kan gøre man ikke får lavet de sidste opgaver så godt som man egentlig formår.

8. I modsætning til dem i maj var det den rigtige type opgaver – de var lidt svære men den rigtige type.

9. Selve opgaverne var fine nok, men det var tydeligt at mærke at man havde holdt ferie i de to forudgående måneder.

10. Opgaverne var passende svære, og svarede til de opgaver vi før havde beskæftiget os med. Problemet var måske at det var lang tid siden vi sidst havde øvet os på opgaveløsninger.

11. Jeg synes opgaverne var gode og lignede dem vi havde arbejdet med i to [år]. Jeg synes faktisk også det gik ret godt til eksamen og det er der mange der synes, derfor er det underligt vi alle sammen fik så dårlige karakterer.

12. Ok, men hvad gør man når man går kold?

13. Det var nogle gode opgaver, det var dem vi var vant til at arbejde med, og det var selvfølgelig en fordel. De var rimelig åbne så [man] kunne gribe dem an på mange forskellige måder.

14. Jeg deltog ikke i omeksamen.

15. Jeg synes egentlig de var meget gode, men der har nok været nogle fælder, som jeg ikke så, da jo ikke gik så godt.

16. Den var FUCKED UP!!!! Den var svær og jeg synes generelt, at vi blev vurderet hårdt!

17. Jeg synes at i forhold til de andre vi har øvet med så var de svære, men ideen i at man selv skal tænke kan jeg godt lide. Det giver den enkelte elev mere frihed til at vise hvad de kan.

18. Bedre end i maj.

19. Den var vel fin, men jeg havde glemt en del af matematikken i sommerens løb og det var svært at få terpet sig tilbage til den oprindelige form.

20. Problemopgaverne har været ok gode.

21. Opgaverne ligger ikke op af de opgaver vi har arbejdet med i undervisningen og derfor påvirkede det prøven i den negative retning.

22. Den var ikke specielt god fordi den pga. den fejlagtige første eksamen lå efter sommerferien hvor meget var glemt og det hele lå utroligt langt væk. Desuden er det af min opfattelse at det var lettere at score høje karakterer i de prøver vi havde før eksamen (som burde være det samme!).

23. Den skriftlige del var en katastrofe, men det ved du jo godt. Da I fik tilpasset den vores niveau var den rimelig fornuftig, men jeg kunne stadig ikke finde ud af det.

24. Jeg synes, at det problem afspejler min holdning til projektet. Det var noget mærkeligt noget. Måske ville kommunikation have hjulpet... Det var godt der kom en omeksamen.

25. Jeg gik ikke om i August.

Hvordan vil du karakterisere **forskellen** *på disse opgaver og de opgaver der blev stillet til den første eksamen i maj?*

1. Jeg synes at vores færdigheder var ret svære og at der var en relativ mangel på det matematiske der. Projektopgaverne synes jeg matchede de tidligere opgaver godt.

3. De opgaver vi fik i maj, var meget ledende til ét svar. Man havde ikke mange muligheder for selv at arbejde med opgaverne. De passede ikke særligt godt til det vi har arbejdet med i 2 år. Dem i august var bedre, men måske lidt svære?

4. I den første fik vi ikke lov til at tænke frit, vi blev guidet hele vejen til løsningen.

5. Forskellen lå i bedre og kortere formulering af opgaverne i prøven i august. Opgaverne var også mere åbne og mindede om dem vi har øvet os i.

6. Forskellen mellem opgaverne til eksamen i maj og opgaverne i august var at de i maj ledte efter et bestemt facit, de havde lavet afgrænsningerne for os. Det er jo ellers det vi har brugt tid på selv at lære og desuden var opgaverne lige blevet 3 gange så lange som de plejer at være. Derfor havde de både taget den del fra os hvor vi selv skulle stille opgaven, det er jo det vi har lært, og samtidig var der ikke nok tid når de havde gjort opgaverne så meget længere.

7. Ved den første eksamen var delen hvor vi selv skal formulere vores opgave (eller måske grænserne for den) lavet for os. Opgaverne var formuleret sådan at man både fik den overordnede beskrivelse som vi var vant til (fra jeres opgaver) men samtidig fik vi nærmest også at vide hvordan vi skulle nå dertil.

8. I maj var de for konkrete og der var et endeligt korrekt svar – det var der ikke nødvendigvis i dem i august.

9. Opgaverne i maj var meget forskellige fra de opgaver vi havde beskæftiget os med i undervisningen. Derfor havde de ikke så meget at gøre med vores projekt.

10. Opgaverne i maj var for fastsat, og der var for mange del-spørgsmål og det frustrerede.

11. De opgaver vi fik til omeksamen var den slags opgaver vi havde arbejdet med i to år, så dem havde vi lært at arbejde med. Opgaverne til den første eksamen var slet ikke dem vi var vant til.

12. Mere ala dem vi normalt er blevet stillet overfor.

13. Opgaverne til eksamen i maj, var meget lukkende, og der var virkelig mange underspørgsmål, der gjorde at man arbejdede under konstant pres. Jeg følte ikke at jeg blev færdig med en eneste opgave, fordi der hele tiden var noget mere man skulle svare på eller forholde sig til. Gruppearbejdet fungerede heller ikke så godt, fordi vi knap nok havde nået at læse alle opgaver grundigt igennem. Til omeksamen var opgaverne hurtigt læst igennem, hvilket gjorde det muligt straks at begynde at overveje hvordan de kunne løses, og gruppearbejdet fik derved meget større betydning.

14. Deltog ikke.

15. Dem vi fik først, var meget mere styrende for hvad det var man skulle gøre, det virkede som om, at de opgaver ville have en til at ende et bestemt sted, og man fik simpelthen stress af dem.

    Dem vi fik til omprøven, kunne vi selv bestemme hvad vi ville med, nogenlunde da. Og det var meget mere frit, hvordan du ville gribbe opgaverne an.

16. Opgaverne er drukket væk, men jeg mindes, at de var nemmere at gå til, men jeg ved ikke om det var de samme personer der bedømte dem???

17. Lidt mere frie! Men jeg synes stadig de var sværere end dem vi plejede at lave.

18. Forskellen var at den prøve i august mindede mere om de problemopgaver vi var vant til. De var mere “åbne”, hvor dem i maj hentydede til mere at lede efter et specifikt svar.

19. De var friere = mere i den stil med dem vi havde arbejdet med i timerne.

20. Færdighedsregningen var sværere i forhold til 1.g...

21. Begge eksamensopgavesæt var uhyre svære og jeg føler ikke vi er klar til skr. eksamen, fordi vi arbejder på en anden måde i vores projekter, der ikke kan bruges til disse skr. opgavesæt.

22. Mere åbne.

23. Jeg synes at gruppearbejdet gik rigtig godt til eksamen og alle arbejdede kreativt og intens.

24. Det var som om at de opgaver som vi fik til den første eksamen var nogle til et andet projekt. De var slet ikke af samme slags som dem vi var vant til.

25. Jeg gik ikke om i August.

*Hvad synes du om **færdighedsdelen af den skriftlige eksamen** som den forløb til omeksamen i august måned?*

1. Var der ikke.

3. Ufatteligt svær! Mange af tingene kunne man slet ikke genkende!

4. Svær! Jeg kunne ikke huske særlig meget, og noget havde vi ikke lært. Fx i sandsynlighedsregning E(X)???

5. Den var meget svær og tog lidt pusten fra mig inden problemløsningsdelen. Man siger jo at en omeksamen/sygeeksamen er sværere, men det var ikke os der valgte at gå til sådan en.

6. Færdighedsdelen til den skriftlige eksamen i august var alt alt for svær! Det gjorde bl.a. at man blev dybt frustreret og derfor heller ikke klarede problemløsningsdelen lige så godt som man eller ville have gjort, fordi man på en eller anden måde havde fået overbevist sig selv om at man nok var dum når man ikke engang selv kunne løse de færdighedsopgaver.

7. Jeg mener den var meget svær i forhold til den egentlige eksamen. Enten viser det tydeligt at vi mangler træning i dette eller også har ministeriet ikke forstået vores begrænsninger.

8. Opgaverne var for spredte og vi havde ikke lært de brugte symboler, derudover var de sværere end i maj og relaterede ikke ordentligt til vores daglige undervisning.

9. Vi har snakket om det i klassen og alle var enige om at den var utrolig svær. Jeg synes ikke at det var helt fair, at vi fik en sygeeksamen i august. Jeg synes, at færdighedsdelen i maj var meget bedre.

10. Den var utrolig svær ift. den i maj, og vi var i forvejen ikke stærke i færdighed.

11. Den var alt for svær, opgaverne var slet ikke dem vi havde læst op til.

12. Den synes jeg simpelthen var helt i vejret! Der var ikke en af de opgavetyper som jeg ellers så flittigt havde tærpet igennem (og det var bestemt ikke få ca. omkring 15 problemregningsark). Vi var simpelthen ikke i stand til at løse størstedelen af opgaverne, om vi har lært hvordan man udregner dem kan jeg ikke huske, men det har ihvertfald kun været en hurtig gennemgang!

13. Jeg bliver stadig rasende når jeg tænker på den... Den var virkelig meget sværere end den fra maj, og det irriterer mig virkelig hvis dem der lavede den ikke selv kan se det. Jeg tror også at alle andre matematiske klasser på gymnasierne rundt omkring i Danmark ville have haft svært ved dem.

14. Deltog ikke.

15. Jeg synes den var svær, og i mange af opgaverne kunne jeg ikke engang gennemskue, hvad det var jeg skulle. Jeg havde helt klart for store huller i disse opgaver.

16. Den er vel ok, hvis vi havde haft de samme muligheder for at træne til opgaverne som de andre. Vi er på herrens mark på dette område, og derfor ville det kun være fair, hvis vores færdighedsregning blev tilpasset vores niveau.

17. Meget sværere end ellers.

18. Svær!

19. Svær! Men sådan er det jo med eksamener.

20. færdighedsopgaverne var rigtigt svære...

21. Manglende arbejde med denne del i undervisningen medførte at jeg havde svært ved denne del.

22. Vi havde utilstrækkelig træning/erfaring i disse opgaver.

24. Opgaverne var fine, men jeg synes ikke at vi var gode nok. Vi havde ikke lært nok færdigheds-regning.

25. Jeg gik ikke om i August.

Indsats

*Hvad synes du om **Karstens indsats**?*

1. God indsats. Men han skal give os (hans elever) lidt mere disciplin hvad angår tavleundervisning og afleveringsfrist.
2. Generelt synes jeg egentlig at han gjorde det meget godt. Men jeg har haft indtryk af, at han var mere interesseret i projektet i starten end i slutning. Måske havde det noget at gøre med, at han flyttede til Fyn.
3. Udmærket, når man tænker på afstanden fra hans hjem og til AG.
4. Han har prøvet meget forskelligt og gjort hvad han kunne.
5. Jeg mener Karsten gjorde sit for at forsøget kunne køre.
6. Karstens indsats har været meget varierende. Den var god i 1.g, men på et tidspunkt i 2.g var det lidt som om alle mistede motivationen. Men i forbindelse med vores omprøve har hans indsats været rigtig god!
7. Den har været meget svingende. I 1.g følte jeg at han gik meget op i projektet mens jeg følte at han i 2.g mistede meget af sin motivation, hvilket resulterede i meget ustruktureret undervisning.
8. God i 1.g, men på et tidspunkt i løbet af 2.g mistede alle (inkl. eleverne) lidt motivationen.

11. Nogen [gange] var det lidt uorganiseret og der synes jeg godt Karsten kunne have trådt ind. Og hen imod slutningen synes jeg det var meget stressende og forvirrende fordi der følte jeg først vi skulle til at lære færdighedsdelen. Men ellers gjorde han det godt når man tænker på det er et nyt forsøg.
12. Karsten er en god lærer! Men han var for blød, og jeg må indrømme at jeg blev meget såret efter at min far havde skrevet til rektor ang. den skriftlige eksamen omkring mine/klassens lave eksamenskarakterer og censorernes udtalelser. Først fik vi et meget venligt brev, men næste brev var knapt så venligt. Rektor havde snakket med Karsten som gik i forsvarsposition og praktisk taget sagde at jeg slet ikke var berettiget til mine ellers så fine årskarakterer og at det ikke undrede ham at det ikke gik mig godt til eksamen. Så skal man ikke give mig gode karakterer. Jeg var ikke bevidst om at jeg ikke var god nok, jeg fik jo pæne karakterer og det gik godt i timerne. På et tidspunk før eksamen blev jeg alligevel lidt nervøs og spurgte Karsten om jeg virkelig var så god som karaktererne viste. Dette svarede Karsten ja til! Jeg kunne bare havde fået noget ekstra undervisning privat op til eksamen men intet tydede på at jeg, og resten af klassen ikke ville klare sig godt. Derudover husker jeg mange timer hvor vi har ventet på en lærer der aldrig kom!

13. Jeg synes, at han skulle have været hårdere. Vores klasse var ikke helt parat til at have et så stort ansvar for egen indlæring. Bortset fra dette synes jeg det har været fint.

14. Endnu et spørgsmål jeg ikke føler mig i stand til at besvare.

15. Jeg synes helt ærlig ikke den var god nok.

16. Det hele har været nyt for os alle, men jeg synes at Karsten har gjort det godt. Når vi har haft vikar har de været totalt uforstående for vores projekt, men jeg synes generelt han står til UG som man siger!

17. Det var lidt svært i 2.g når han ikke var på skolen hele ugen, for hvis man skulle have fat i ham så var det over telefon og det er ikke helt det sammen som face to face... men i 1.g var den fin nok.

18. Meget svingende. I starten virkede han meget opsat på ideen, men som tiden gik blev der gjort knap så meget ud af det.

19. God når han var på skolen, men hans fravær (han flyttede til Fyn) har været lidt svært.

21. I orden men han har ikke været god nok til at vægte mellem projekter og eksamener. Hvilket har medført at størstedelen af klassen ikke har opnået gode karakterer til eksamenerne.

22. OK.

23. Karsten var meget dedikeret i hans arbejde og ønskede at vi ville få en stor kompetence.

24. Han gjorde en god indsats og prøvede virkelig at få det til at fungere. Mange gange var vi bare uheldige. Vi mistede mange dumme timer, på latterlige ting. Blandt andet gik der mange timer til spilde med flex-dagene.

25. Han gjorde et ihærdigt forsøg og jeg fik da også lidt ud af det. Mere end jeg ville have på et normalt mat-hold.

Er der ting han kunne have **gjort anderledes***, som efter din mening ville have gjort forløbet mere udbytterigt eller på andre måder bedre?*

1. Jeg tror han skal give os (hans elever) lidt mere disciplin hvad angår tavleundervisning og afleveringsfrist.
2. Der var mange timer der blev aflyst, på grund af Karsten. Jeg synes også at han skulle have satset mere på tavleundervisning, for det fik vi mere ud af, som nævnt tidligere.
3. Kan ikke lige komme på noget. Måske mere tid til at lave almindelige opgaver i grupper.
4. Han skulle måske have være mere konsekvent med lektier osv.
5. Måske kunne han have holdt en mere klar linie mellem projekt og alm. undervisning. Det var et krav at vi også skulle have alm. undervisning under forsøget, men jeg synes det rodede tingene lidt sammen.
6. Der kunne godt have været mere struktur i undervisningen.
7. Struktur!!!!!
8. Både og! Det har ofte været unødvendigt at lave lektier, da jeg alligevel kunne følge med. Derudover var der ikke andre der gjorde det, så opgaver blev gennemgået i timen.
9. Han kunne godt have struktureret undervisningen mere i visse perioder.
11. Jeg synes måske ikke altid vi skulle have gruppearbejde så lang tid ad gangen, nogen gange kørte men lidt træt i det og så kunne det godt blive lidt useriøst. Så hvis man kunne lave nogen undervisningstimer indimellem, hvor vi måske lavede opgaver der omhandlede emnet.
12. Været strengere og for mit vedkommende burde han have sagt det hvis han virkelig mente at jeg ikke var mine karakterer værd så jeg kunne ha gjort noget ved det!
13. Han skulle have været hårdere, og bedre til at sige at: "...Nu er det altså sidste chance med den og den aflevering." Jeg har sikkert selv benyttet mig af det et par gange, men i denne sammenhæng synes jeg, at vi fik for lang snor.
14. Endnu et... [spørgsmål jeg ikke føler mig i stand til at besvare]
15. Jeg synes ikke det virkede som om han havde nok styr på det, det blev selvfølgelig ikke bedre af at han flyttede til Fyn, men sådan var det jo, så blev det bare sværere for ham. Jeg synes godt hans tavlegennemgang kunne have været bedre.

16. Eventuelt lidt mere tavleundervisning og en hårdere tone fra ham. Nogle gange strakte projekterne sig over flere måneder og det er noget rod!

18. Halveret klassen noget oftere. Så han underviste færre af gange. Det gjorde at man forstod mere og fik mere ud af timerne (der var knap så meget uro).

19. Han skulle have været (som omtalt før) meget mere streng!

20. Jeg føler at Karsten nogle gange ikke har været så meget med som han kunne. Der har været nogle gange hvor han [ikke] engang mødte op til undervisningen...

22. Mere fokus på færdighedsregning med hensyn til selve matematikken frem for bevisførelsen.

24. Han skulle være mere streng og kontant. Selvfølgelig var det også godt, at han var flink og rar, men med hensyn til afleveringer kunne han godt have gået mere op i at få dem alle til tiden.

25. Man kan ikke brokke sig over Karsten, men når man laver så meget gruppearbejde ville det have været rart med en lærer mere eller en assistent der kunne gå rundt og hjælpe. Der var for meget spildtid.

Hvad synes du om ***din egen indsats****?*

1. Jeg kunne mærke at min indstilling til matematik nogle gange var lidt slatten fordi der ikke var så meget disciplin i vores timer. Dette skete heldigvis kun nogle gange. Der var også tider hvor emnet og alt sammen fængede og man blev helt bidt indtil opgaven var færdig.

2. Jeg synes at min indsats, med hensyn til projektarbejdet i grupperne, var god. Der var jeg altid med. I undervisningen synes jeg også at jeg fik sagt en del, selvom Karsten ofte sagde at det ikke var nok jeg sagde. Når vi fik opgaver for hjemme, var det sjældent at jeg lavede dem, for det var meget tit, at vi ikke fik tjekket dem. Til gengæld fik jeg stort set altid læst.

3. Kunne være bedre, men ok.

4. Generelt var vi selv skyld i at undervisningen gik i stå nogle gange. Vi lavede ikke nok!!!

5. Jeg ville nok have fået mere ud af projektarbejdet hvis jeg var gået mere op i det fra start af.

6. Min egen indsats har været både op og ned! Jeg følte ind imellem at det ikke var nødvendigt at jeg lavede lektier for det var der alligevel ikke ret mange andre der gjorde og det var ikke noget problem at følge med

alligevel. Der var i undervisningen for meget fokus på dem der havde svært ved at følge med. Det var ofte også dem der ikke havde lavet deres opgaver og det kan ikke være meningen at man skal bruge timen på at gennemgå nogle opgaver når folk ikke engang selv har forsøgt at løse dem.

7. Min egen indsats har været meget svingende. Under projektforløbene mener jeg at jeg har været meget aktiv og motiveret, hvorimod min koncentration under de mere normale forløb har været for dårlig. Jeg har simpelthen ikke ofret nok tid på matematiklektier.

8. Som sagt har det ikke altid været nødvendigt at lave lektier. I timerne har jeg dog altid været med – føler jeg selv.

9. Den har været ok synes jeg.

10. Jeg har deltaget, men jeg kunne have gjort det bedre endnu, fx med at lave opgaverne til hver time som skulle gennemgås på tavlen.

11. Jeg synes jeg var engageret i undervisningen og gruppearbejdet. Selvfølgelig var det lidt useriøst nogen gange og det kunne man måske godt have undgået. Men ellers synes jeg også vores rapporter tit var gode.

12. Jeg mener at jeg ydede den indsats som der blev krævet af klassen (dette var dog ikke meget og vi blev derfor lettere sløsede hvilket også må have irriteret Karsten).

13. Man kan vel altid have læst grundigere på lektierne, og det ville da selvfølgelig have forbedret mit udbytte, hvis jeg havde brugt endnu mere tid på mine lektier. Ellers ved jeg ikke rigtig. Mine rapporter og afleveringer bruger jeg generelt meget tid på.

14. I bund og grund synes jeg at jeg gjorde hvad jeg kunne. Men jeg indrømmer at jeg til sidst i forløbet havde mistet en væsentlig del af mit engagement. Igen pga. de personlige årsager jeg før har forklaret.

15. Jeg prøvede virkelig, og gjorde også en ekstra indsats, men jeg synes ikke rigtig det lykkedes, og så er det svært at finde interessen og endte med at jeg blev meget træt af det.

16. Generelt synes jeg at jeg har lagt en stor byrde i gruppearbejdet. Alt afhængig af gruppens niveau, men jeg mener selv at jeg i mange af projekterne har været drivkraften!

17. Jeg har været lidt for sløset fordi jeg ikke er en af de gode skrivere har det været meget svært at skrive rapporterne så det tager modet væk. Det var også svært i starten fordi vi ikke vidste hvordan det skulle laves da vi ikke havde nogen retningssnor!

18. Ikke altid den bedste.
19. I enkelte projekter middel indsats, men ikke i størstedelen. Min indsats har nok været mangelfuld. Det er svært at føle sig motiveret når man stinker til matematik.
20. Jeg har ikke ydet så meget som jeg måske kunne.
21. God og stabil.
22. Ok.
23. Min indsats har som før nævnt ikke været til topkarakter for at sige det mildt. Jeg kan ikke lide mat. og har aldrig kunnet det, jeg kan simpelthen ikke se hvornår jeg skal bruge alle de små latterlige formler.
24. Jeg lagde ikke nok engagement i timerne. Jeg kunne i det hele taget ikke tage mig sammen, da jeg ikke kunne se en større og overordnet sammenhæng. Det var nok også grunden til at jeg skiftede hold efter 2. år.
25. Den kunne have været bedre, men jeg er egentlig godt tilfreds.

Er der ting du kunne have ***gjort anderledes****, som efter din mening ville have gjort forløbet mere udbytterigt eller på andre måder bedre?*

1. Lidt mere tavleundervisning før man går i gang med projekterne. Derved har man en bredere viden end vi havde til at uddybe sine projektafleveringer.
2. Jeg kunne have regnet flere opgaver hjemme og dermed fået en smule mere træning, men det kræver jo, at man får de rigtige svar og en gennemgang hvis de er forkerte.
3. Måske gøre lidt mere ud af hjemmeopgaverne (ikke afleveringer).
4. Været mere aktiv.
5. Jeg kunne engagere mig mere i gruppearbejdet, men det er svært da jeg faktisk synes at alle nogenlunde ydede en del.
6. Jeg kunne jo selvom jeg ikke kunne se meningen med det være blevet ved med at lave mine lektier og havde ladet være med at lade projekterne løbe ud i sandet og ladet være med bare at lave hele projektet hvis de andre ikke lavede noget, så jeg i god tid kunne have vist at der var noget galt.
7. Ja lavet mine lektier!
9. Jeg kunne have været mere aktiv i timerne.

11. Måske kunne jeg godt begynde på selve rapporten lidt før så jeg kunne bruge lidt mere tid på den. Og nogen af timerne kunne man nok godt have arbejdet lidt mere koncentreret.

12. Det ved jeg ærligt talt ikke, jeg så ingen faresignaler, jeg troede jo det gik godt!

13. Ikke andet end at bruge mere tid på mine lektier – men det kan man jo altid og i alle fag. . .

15. Ikke sådan lige, synes da jeg prøvede.

16. Måske taget udfordringen op med lidt sværere matematik. Nogle af rapporterne var børnematematik!

18. Nogle gange skulle jeg måske ikke have opgivet så hurtigt som jeg havde tendens til at gøre.

19. Jeg skulle nok have været mere fokuseret fra starten af, så jeg ikke lige pludselig stod og manglede en masse færdigheder og kompetencer som er nødvendige for at give og få noget ud af gruppearbejde.

20. jeg kunne have været mere med i timerne og lidt mere konc.. . .

22. ?

23. Hvis jeg havde lyst til at lære, så kunne jeg bare være med i timen, for det var et fint projekt og muligheden for at lære noget var i høj grad til stede. Der var ikke andre end mig der kunne have gjort, så det hele var endt anderledes. Jeg ved ikke rigtig om min evaluering overhovedet burde tælle med, for jeg har slet ikke fulgt med i mat. de sidste to år. Men hyggeligt var det da.

24. Jeg skulle nok bare gøre det modsatte af hvad jeg gjorde. Til gengæld synes jeg også at Karsten skulle gøre en større indsats, men det er jo svært når det er helt nyt.

25. Det er der altid. Jeg kunne have været bedre forberedt og været mere koncentreret i timerne.

Afrunding

Et af målene med dette forsøg har været at få erfaringer med, hvordan man skal gribe tingene an hvis en lignende form for undervisning skal gøres mere udbredt i fremtiden.

Er der i den forbindelse noget fra dette forsøg du synes har været specielt vellykket, og derfor vil **anbefale at man holder fast i**?

1. Jeg vil helt klart anbefale at I holder fast i de åbne former for opgaver. Dette giver den enkelte elev ret til selv at udtrykke hvad han/hun synes er bedst at bruge i de individuelle opgaver.

2. Det har været sjovt at prøve at lave projekter på den måde, men det var lidt for tit. Man kunne måske ligge et par projekter ind i den normale undervisning, så der kom lidt afveksling, uden at man bliver træt af det. Projektopgaverne var også sjove at prøve at løse. Det var godt at man selv kunne bestemme sværhedsgraden af opgaven i stedet for at opgaven bestemmer den.

3. Problemopgaverne! Det er det der gør denne undervisningsform mere interessant end den normale!

4. Projektdelen og det at matematikken perspektiveres.

   Det at man får en opgave man ikke kan løse. Dette driver en til vanvid og man vil derfor gerne lære det bagefter.

5. Man skal holde fast i opgavernes korte og enkle formulering. Jeg synes de har været meget forståelige.

6. Jeg synes at det har været meget vellykket det der med at forklare hvad matematikken skal bruges til inden man lærer nogle formler, man godt nok kan, men ikke ved hvad man reelt skal bruge til. Det gør også forståelsen af matematikken større. Samtidig er projekterne rigtig gode til at relatere matematikken til den "virkelige" verden!

7. Jamen jeg mener at man skal holde fast i selve grundtanken. Jeg mener som sagt mest det drejer sig om at vi skulle have struktureret tiden bedre.

8. Realitetsbunden undervisning (dvs. undervisning der direkte kan bruges i virkeligheden) da man på den måde kan se hvad det man lærer kan bruges til efter skolen slutter.

9. Jeg er glad for, at jeg har lært at gribe tingene an på en god og konstruktiv måde.

10. Modelleringsprojekterne har givet mig meget, og hvis man sørger for at holde en stram line, er de rigtig lærerige.

11. At skrive en rapport om de forskellige matematiske emner man har, synes jeg er en god ide. Og gruppearbejde.

12. Gruppearbejdet! Dette er med til at styrke klassen og har gjort at vi også i andre fag er bedre til at arbejde sammen med andre, men man SKAL også trænes i at arbejde selvstændigt, noget vi mangler.

13. Jeg synes helt klart at man skal holde fast i projekterne, måske gøre antallet og størrelsen af dem lidt mindre, så man på den måde heller ikke bruger så meget tid på dem.

    Jeg synes også, at man skal holde fast i selve måden at lære matematik på, ved at vise hvad den bruges til i hverdagen, og i det hele taget hvilke muligheder matematikken giver.

14. Projekterne. Mine oplevelser med dem er at de har fungeret godt. Jeg vil skyde på at 3–4 rapporter pr. år ville passe fint.

15. Ikke specielt, måske at man lærte at skrive rapport over et emne, men det er ikke noget der skal fylde så meget og så modellering var en god ting.

16. Ja, selve arbejdet omkring rapporterne – altså gruppearbejdet – det vil stille os bedre i en virksomhed da meget handler om grupper på arbejdsmarkedet! Mere gruppearbejde, dermed kan man også selv styre om man vil lave noget i skolen eller derhjemme… det er op til en selv med den fleksibilitet!

    Også den mundtlige eksamensform i 1.g!!! AWESOME!!!

17. Jeg synes at den ide med problemopgaver er en rigtig god ting. Det er situationer man kunne komme ud for i hverdagen og derfor mere relevant end et regnestykke som fx en ligning for i hverdagen får man jo ikke en ligning stillet, der skal man selv finde frem til den!

18. Projekterne og problemopgaverne ved eksamen er ganske gode – ideen er ikke helt tosset. Dog skal der arbejdes meget mere med det endnu så det kan blive optimalt.

19. Projekterne var gode, dog skal man begrænse dem til et mindre antal. De matematiske færdigheder som ligger til grund for rapporten, skal dog være banket en del mere på plads end vi havde, før man begynder med rapportarbejdet.

20. Jeg synes klart at det at lave rapporter har været rigtig godt og det vil jeg anbefale at man holder fast i, for man får virkelig lært noget hvis man sætter sig [ind] i emnet.

21. Projektarbejdet er vældig godt, fordi det er sådan man arbejder ude i arbejdslivet. Derved skal man beholde denne arbejdsform.

22. Modelleringsprocessen.

23. En ting man burde holde fast i er gruppeeksamen. Det var en stor succes, for mit vedkommende, ellers havde jeg ikke fået den karakter jeg fik.

24. Fra starten af året skulle de forskellige kompetencer gennemgås, sådan at man ligesom har en baggrundsviden. Derefter kunne et forløb så se sådan ud:

    1. Lær én kompetence.
    2. Tavlegennemgang/klasseundervisning om kompetencen og matematikken bag den.
    3. Læs lektie derhjemme om det der er gennemgået i timerne.
    4. Igen klasseundervisning. Gennemgang af lektien.
    5. Normal opgaveregning.
    6. Indledning til rapport. Starter rapportforløb med gruppearbejde.
    7. Rapportskrivning.

    Fastlagte grupper. Man skulle igennem hele tiden bruge de samme grupper. Derefter startes forfra. Jeg ved selvfølgelig ikke om det er muligt, men for mig kunne det være en god måde at lære denne matematik/undervisningsform på.

25. Det har klart været en hjælp for mig, på grund af den ændrede måde man skal tænke på. Og jeg tror også at det vil hjælpe mange andre der har svært ved matematik.

Er der noget du synes har været specielt lidt vellykket, og derfor vil ***anbefale at man gør anderledes****?*

1. Der skal efter min mening en smule mere tavleundervisning og gennemgang af forskelligt matematik til før et projekt kan gå i gang.

2. Mindre tid til rapporter så der kommer mere tid til tavleundervisning. Hvis man får opgaver for hjemme, skal de gennemgås i timen, for ellers laver folk dem ikke. Og så er det ikke en god ide, at lade eleverne sidde i grupper og lære stoffet selv (som ved differentialregning) – for de får det ikke lært.

3. Fjern færdighedsdelen til eksamen! Vi er ikke lige så trænede til forsøget som andre klasser, og vil derfor aldrig kunne komme op på deres niveau.

4. Vores generelle regnefærdigheder. Jeg kunne forestille mig et nyt forsøg hvor man har fem timers matematik om ugen. 1–2 af dem er normal matematikundervisning og resten er projektundervisning. Dette tror jeg vil give maksimalt ud af matematikundervisningen.

5. For at korte opstarten af ny opgave, kan evt. gives ledetråde når gruppe sidder fast. En større opdeling af alm. undervisning og projekt vil hjælpe på koncentration.

6. Hvis noget skal være anderledes vil jeg mene at det er vigtigt at det ikke kun er den mundtlige men også den skriftlige eksamen [som] afspejler den daglige undervisning.

8. Der har været for lidt konkret undervisning (fx uden hjælpemidler).

9. Jeg synes ikke at kursusdelen har været helt optimal.

10. Mængden af teori til færdighed har ikke været omfattende nok, og vi har ikke haft tid nok til det.

11. Jeg synes det har været lidt rodet, men det er selvfølgelig også et nyt forsøg. Så det skal måske være lidt mere organiseret. Og måske skulle vi ikke have haft så meget frihed.

12. Hele projektet! Ked af at sige det, men vi er blevet ringere til matematik end andre klasser, også til det som det senere vil forventes at vi kan lige så godt som enhver anden klasse. Noget vi også har kunnet mærke i både fysik og kemi, hvor Ole B simpelthen måtte lære [os] simple matematiske UDREGNINGER som vi ellers burde have lært og skulle bruge i disse fag.

13. Der skal helt sikkert justeres lidt ved pensum, og mængden af de forskellige opgaver, så man samtidig med forståelsen også opnår færdighederne.

14. Bedre disponering af tid. Man skal også huske at det er vigtigt at eleverne lærer pensum – ordentligt.

15. Synes ikke det er gået specielt godt.

16. Ændret skriftlig eksamensform! Den stank, da opgaverne var for svære! Bedre færdighedsregningskundskaber mangles!

17. Mere adskilt projekt og teori. Her i 3.g har vi prøvet at køre det sådan at vi har længere perioder med fx kun teori og det synes jeg har været meget bedre og mere overskuligt.

18. Nej!!

19. Mere opgave gennemregning ("slaveregning"), og grundigere gennemgange.

20. Man skulle måske lave lidt flere færdighedsregninger, for man kan se på vores eksamen er vi ikke [er] så skarpe til det som andre elever. . . og det har været et problem til eksamen. . .

21. Man burde justere eksamenerne med projektarbejdet pga. det pt. ikke passer sammen. Derved ville man få noget ud af det meget arbejde i projekterne som ikke kan bruges til eksamenerne.
22. Bevisførelsen idet det kræver for meget tid med for lidt udbytte.
23. Hvis noget skulle gøres bedre, så er det nok halvdelen af klassens arbejdsmoral, for den er tynd.
24. Jeg ved ikke om der er noget man skal skrotte eller holde fast i. For mig var forsøget ikke særligt vellykket.
25. Jeg var godt tilfreds.

Eventuelt ***yderligere bemærkninger:***

2. Nu har jeg sprunget over på det normale højniveau i matematik og selvom jeg føler, at jeg ikke har lært alt det jeg normalt ville have lært, går det ret godt. Det skyldes nok netop, at jeg har lært at løse et problem selvom jeg ikke har lært alle teknikkerne til det i forvejen. Men der er mange regler mht. noget så simpelt som potensregning, brøkregning, sinus/cosinus og logaritmer, som de andre bare kan, hvor jeg må sidde og kigge i formelsamlingen hele tiden. Det ville have været meget rart hvis vi havde øvet mere af den slags og lært de regler udenad, for det kan de andre.

   Men alt i alt er jeg meget overrasket over, hvor godt det går, for jeg klarer mig faktisk lige så godt som de andre.

7. Jeg synes det har været spændende at være med i projektet og er glad for at jeg har forstået hvor jeg kan bruge min matematiske viden i stedet for kun at kende en masse formler.
8. Selvom der var nogle problemer med hensyn til eksamen, er jeg glad for at have valgt projektlinien, og har også valgt det på højt niveau i 3.g.
9. Jeg er meget glad for at jeg har valgt denne form for matematik i gymnasiet og har bestemt ikke fortrudt det. Jeg synes, at det er synd for projektet at eksamen gik som den gik. Jeg synes ikke, at det er helt fortjent at klassen sluttede med så dårligt et gennemsnit.

   Jeg synes, at det har været et meget spændende projekt, som man helt sikkert skal holde fast på og fortsat udvikle. Jeg er overbevist om, at det er den rigtige måde at arbejde med matematik på i gymnasiet.

10. Spændende projekt, som hvis man laver justeringer, formentlig giver mere end den normale undervisningsmodel. Det giver mere selvstændighed, og får en til at stille flere spørgsmål til matematikken!! Det at matematikken ikke kun er gammel teori i en lige så gammel og støvet bog, men istedet

er noget man kan bruge til at løse problemer vi står overfor i dag, gør at det er noget man gerne vil beskæftige sig med fremover. Det har været en oplevelse at være med.

13. Jeg synes at det har været spændende og det rigtige for mig at være med i dette forsøg, så jeg håber at I får noget ud af det.

18. Jeg synes at det var iøjnefaldende at klassen i snit havde klaret sig bedre ved screeningen i starten af 1.g end screeningen i 2.g. Selve ideen til projektet er god, der skal bare lægges flere kræfter i.

24. Jeg fandt ud af, at denne undervisningsform, ikke passede mig. Jeg kunne bedre sætte mig ind i den gamle metode. Det var svært for mig at se en sammenhæng i undervisningen. Jeg kan bedre lide at få stillet en normal opgave med et facit.

Referencer

Andersen, H. & Kaspersen, L. B. (eds) (1996). *Klassisk og moderne samfundsteori*, Hans Reitzels Forlag, København.

Andersen, N. O., Busch, H., Horst, S. & Troelsen, R. (2003). *Fremtidens naturfaglige uddannelser. Naturfag for alle – vision og oplæg til strategi*, number 7 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, Undervisningsministeriet, København.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L. & Smith, J. P. (1998). Teaching Mathematical Problem Solving: An Analysis of an Emergent Classroom Community, *in* Schoenfeld et al. (1998), pp. 1–70.

Artigue, M. (2002). Didactic engineering and the complexity of learning processes in classroom situations, *in* C. Bergsten et al. (eds), *Research and Action in the Mathematics Classroom. Proceedings of MADIF2*, Svensk Förening för Matematikdidaktisk Forskning (SMDF), Linköping, Sweden, pp. 5–20.

Bachrach, P. & Baratz, M. S. (1962). Two faces of power, *The American Political Science Review* **56**: 947–952.

Barkatsas, A. N. & Hunting, R. (1996). A review of recent research on cognitive, metacognitive and affective aspects of problem solving, *Nordic Studies in Mathematics Education* **4**: 7–30.

Bastian, P. (1992). At danse med matematikken, *in* T. Christoffersen & F. Clausen (eds), *Udsagn – en mosaik om matematik*, Matematiklærerforeningen, København, pp. 111–117.

Bazzini, L. (ed.) (1994). *Theory and Practice in Mathematics Education*, The SCTP-group, Pavia, Italy.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (eds) (1983/1964). *Philosophy of Mathematics – Selected readings*, 2. edn, Cambridge University Press, New York, USA.

Berthelsen, J., Illeris, K. & Poulsen, S. C. (1985). *Grundbog i projektarbejde – teori og praktisk vejledning*, Unge Pædagoger, København.

Best, J. B. (1999). *Cognitive Psychology*, 5. edn, Wadsworth Publishing Company, Belmont, USA.

Biehler, R., Scholz, R., Strasser, R. & Winkelmann, B. (eds) (1994). *Didactics of Mathematics as a Scientific Disciplin*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Blomhøj, M. (1992a). Modellering i den elementære matematikundervisning – et didaktisk problemfelt, *Technical Report MI 58*, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M. (1992b). Samspil mellem teori og praksis – en forskningspraksis i matematikkens didaktik, *Technical Report MI 59*, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M. (1995). Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen, *Kognition og pædagogik* **3**: 16–25.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its Applications* **22**: 123–139.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences from using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling, *in* W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, Springer, New York, USA, pp. 45–56.

Blomhøj, M., Jensen, T. H., Kjeldsen, T. H. & Ottesen, J. (2001). Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse – udvikling af et kursus, *Tekster fra IMFUFA* **402**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction, *Educational Studies in Mathematics* **22**: 37–68.

Bollerslev, P. (ed.) (1979). *Den ny matematik i Danmark – en essaysamling*, Nordisk Forlag, Danmark.

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics, *The American Mathematical Monthly* **57**: 221–232.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathematiques, 1970-1990*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Busch, H., Horst, S. & Troelsen, R. (eds) (2003). *Inspiration til fremtidens naturfaglige uddannelser. En antologi*, number 8 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, Undervisningsministeriet, København.

Christiansen, B. (1989). Konferencens tema i fagdidaktiske perspektiver, *in* Nissen & Bjørneboe (1989a), pp. 33–92.

Christiansen, F. V. (1999). Exemplarity and educational planning, *in* H. S. Olesen & J. H. Jensen (eds), *Project Studies – a late modern university reform?*, Roskilde University Press, Roskilde, Denmark, pp. 57–66.

Christiansen, F. V. (2001a). Projektarbejde i naturvidenskabelige grundfag (2. udg), *Papers from DCN* **12**: Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik, Aalborg Universitet.

Christiansen, F. V. (2003). Kridt og kedsomhed – et kritisk blik på universiteternes indledende grundfagsundervisning, *in* Busch et al. (2003), pp. 267–282.

Christiansen, I. M. (1996). Mathematical Modelling in High School: From Idea to Practice, *Technical Report R-96-2030*, Department of Mathematics, Aalborg University.

Christiansen, I. M. (1997). When negotiation of meaning is also negotiation of task, *Educational Studies in Mathematics* **34**: 1–25.

Christiansen, I. M. (2001b). Critical Evaluation of Models in Relation to the Modelling Process, *in* Matos et al. (2001), pp. 391–400.

Dansk Matematisk Forening (ed.) (1981). *Rapport fra Landsmødet om Matematikken i Danmark 1981*, Dansk Matematisk Forening, København.

Davis, P. & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*, Birkhäuser, Boston, USA.

Dieudonné, J. A. (1970). The Work of Nicholas Bourbaki, *The American Mathematical Monthly* **77**: 134–145.

Dolin, J. (2003). Fysikfaget i forandring. Læring og undervisning i fysik i gymnasiet med fokus på dialogiske processer, autenticitet og kompetenceudvikling, *Tekster fra IMFUFA* **415**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Dolin, J., Krogh, L. B. & Troelsen, R. (2003). En kompetencebeskrivelse af naturfagene, *in* Busch et al. (2003), pp. 59–140.

Dræby, C., Hansen, M. & Jensen, T. H. (1995). ADAM under figenbladet – et kig på en samfundsvidenskabelig matematisk model, *Tekster fra IMFUFA* **299**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Eibe, T. (1897). *Euklids Elementer I-IV*, Gyldendal, København.

Eisenhart, M. A. & Howe, K. R. (1992). Validity in Educational Research, *in* M. D. LeCompte, W. L. Millroy & J. Preissle (eds), *The Handbook of Qualitative Research in Education*, Academic Press, New York, USA, pp. 643–680.

Elbow, P. (1979). Trying to Teach While Thinking About the End, *in* G. Grant, P. Elbow, T. Ewens, Z. Gamson, W. Kohli, W. Neumann, V. Olesen & D. Riesman (eds), *On Competence. A Critical Analysis of Competence-Based Reforms in Higher Education*, Jossey-Bass, San Francisco, USA, pp. 95–137.

Elf, N. F. & Østerlund, S. M. (2003). *Oversigt over dansksystemet – kortlægning af danskfaget i alle uddannelsesniveauer*, number 2 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, Undervisningsministeriet, København.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of Mathematics Education*, The Falmer Press, Hampshire, UK.

Essen, E. v., Jensen, T. H. & Wegener, K. (2000). Forsøgsbekendtgørelse om gymnasiets 2-årige forløb til B-niveau i matematik, *LMFK-bladet* **7**: 53–58.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving, *in* L. B. Resnick (ed.), *The Nature of Intelligence*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, USA, pp. 231–235.

Fragniere, G. (1996). Problems of Definition, *in* OECD (ed.), *Assessing and Certifying Occupational Skills and Competences in Vocational Education and Training*, OECD, Paris, France, pp. 39–58.

Gade, A. (1997). *Hjerneprocesser – Kognition og neurovidenskab*, Frydenlund, København.

Galbraith, P. (1993). Paradigms, Problems and Assessment: Some Ideological Implications, *in* Niss (1993b), pp. 73–86.

Galbraith, P. & Clatworthy, N. J. (1990). Beyond standard models – meeting the challenge of modelling, *Educational Studies in Mathematics* **21**: 137–163.

Gregersen, F., Elf, N. F. et al. (2003). *Fremtidens danskfag – en diskussion af danskfaglighed og et bud på dens fremtid*, number 1 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, Undervisningsministeriet, København.

Gregersen, P. & Jensen, T. H. (1998). Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning (specialeafhandling), *Tekster fra IMFUFA* **353**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Griffiths, H. B. & Howson, A. G. (1974). *Mathematics: Society and Curricula*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Grøn, B. (2007). Om variabelbegrebet, om at prøve sig frem og om stikprøveopgaver, *LMFK-bladet* **1**: 12–15.

Grouws, D. A. (ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York, USA.

Haderup, L., Gregersen, L. & Schwartz, N. (eds) (1997). *HJERNE og læring – Stof til eftertanke*, Danmarks Lærerhøjskole, København.

Halmos, P. R. (1957). "Nicolas Bourbaki", *Scientific American* **196**: 88–99.

Harder, P., Øhrgaard, P. et al. (2003). *Fremtidens sprogfag – vinduer mod en større verden. Fremmedsprog i Danmark – hvorfor og hvordan?*, number 5 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, Undervisningsministeriet, København.

Held, D. (1996). *Models of Democracy*, 2. edn, Polity Press, Cambridge, UK.

Henningsen, I. (2001). Matematiske og statistiske modeller i undervisningen, *Papers from DCN* **15**: Dansk Center for Naturvidenskabsdidaktik, Aalborg Universitet.

Hermann, K. & Hirsberg, B. (1989). Recent Trends and Experiences in Applications and Modelling as Part of Upper Secondary Mathematics Instruction in Denmark, *in* W. Blum, M. Niss & I. Huntley (eds), *Modelling, Applications and Applied Problem Solving – Teaching Mathematics in a Real Context*, Horwood, Chicester, UK, pp. 219–226.

Hermann, K. & Niss, M. (1982). *Beskæftigelsesmodellen i SMEC III*, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck, København.

Heyting, A. (1983/1964). The intuitionist foundations of mathematics, *in* Benacerraf & Putnam (1983/1964), pp. 52–61.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding, *in* Grouws (1992), pp. 65–97.

Holton, D. (ed.) (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Høyrup, J. (1979). Historien om den nye matematik i Danmark – En skitse, *in* Bollerslev (1979), pp. 49–65.

Illeris, K. (1974). *Problemorientering og deltagerstyring*, Munksgaard, København.

Iversen, C. (1996). Reformer i gymnasiets matematikundervisning – 60'er matematikken i historisk belysning. 3. modul projektrapport, historieuddannelsen, Roskilde Universitetscenter.

Jensen, H. S. & Skovsmose, O. (1986). *Teknologikritik – et teknologi-filosofisk essay*, Systime.

Jensen, J. H. (1989). Matematiske modeller – vejledning eller vildledning? II, *in* B. Booß-Bavnbek et al. (eds), *Vurdering af matematisk teknologi*, number 164 in *Tekster fra IMFUFA*, Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Jensen, J. H. (1995). Faglighed og pensumitis, *Uddannelse* **9**: 464–468.

Jensen, T. H. (1999). Karakteristik af forskningsprojektet "Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning". Upubliceret arbejdspapir, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter.

Jensen, T. H. (2000a). Forsøgsprojektet "Problemløsning og modellering i den gymnasiale matematikundervisning", *LMFK-bladet* **7**: 37–52.

Jensen, T. H. (2000b). Projektarbejde: Navigering i et skitseret mulighedsrum ifm. en samtænkning af matematik- og fysikundervisningen, Bidrag til seminaret "Højt niveau i gymnasiet på matematisk linje" under projekt "Matematik og naturfag i verdensklasse", Experimentarium, København. Publiceret på http://www.matnatverdensklasse.dk/.

Jensen, T. H. (to appear). Assessing mathematical modelling competency, *in* C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. m. Khan (eds), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, Horwood, Chicester, UK, pp. 141–148.

Jensen, T. H., Larsen, L. H., Sonne, H. & Pedersen, B. B. (2002). *Matematrix 9*, Alinea, København.

Jørgensen, P. S. (1995). Generalisering – i kvalitativ forskning, *in* I. M. Lunde & P. Ramhøj (eds), *Humanistisk forskning inden for sundhedsvidenskab*, Akademisk Forlag, København, pp. 315–328.

Jørgensen, P. S. (1999). Hvad er kompetence? – Og hvorfor er det nødvendigt med et nyt begreb?, *Uddannelse* **9**: 4–13.

Josephsen, J. & Ulriksen, L. (2002). Karakterisering af projektarbejder, *in* K. Beyer, J. Josephsen, B. S. Petersen & L. Ulriksen (eds), *Projektarbejde, eksemplaritet og problemorientering*, Roskilde Universitetscenter, Roskilde, pp. 9–21.

Kaspersen, L. B. (1996). Anthony Giddens, *in* Andersen & Kaspersen (1996), pp. 397–412.

Kilpatrick, J. (1992). A History of Research in Mathematics Education, *in* Grouws (1992), pp. 3–38.

Kleijne, W. & Schuring, H. (1993). Assessment of Examinations in The Netherlands, *in* Niss (1993a), pp. 139–154.

Koch, H. (1991/1945). *Hvad er demokrati?*, 5. edn, Gyldendal, København.

Kristensen, E. & Rindung, O. (1962-64). *Matematik I-III*, GAD, København.

Laursen, E. (1998). Selvstændig læring og problembaseret projektarbejde, *in* E. Damberg (ed.), *Pædagogik i praksis*, number 2 in *Nyt/TEMA*, Undervisningsministeriet, Gymnasieafdelingen.

Law, I. (1997). Hjernens funktionelle kortlægning med Positron Emission Tomografi (PET), *in* Haderup et al. (1997), pp. 24–29.

Madsen, P. K. et al. (1995). Magt og modeller – Om den stigende anvendelse af edb-modeller i de politiske beslutninger, *Teknologirådets rapporter* **1995/4**: Teknologirådet.

Matos, J. F., Blum, W., Houston, K. & Carreira, S. P. (eds) (2001). *Modelling and Mathematics Education: ICTMA 9: Applications in Science and Technology*, Horwood, Chicester, UK.

McLaughlin, M. W. (1987). Learning from Experience: Lessons From Policy Implementation, *Educational Evaluation and Policy Analysis* **9(2)**: 171–178.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk, *Tangenten* **2**: 9–15.

Meyer, H. (1979). Læseplansrevisioner i gymnasiet og HF, *in* Bollerslev (1979), pp. 99–106.

Mogensen, J. (1997). Skolen former hjernen, *in* Haderup et al. (1997), pp. 10–23.

Moschovakis, Y. N. (1994). *Notes on Set Theory*, Springer-Verlag, New York, USA.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, USA.

Neumann, J. v. (1983/1964). The formalist foundations of mathematics, *in* Benacerraf & Putnam (1983/1964), pp. 61–65.

Nielsen, K. & Kvale, S. (1999). Mesterlære som aktuel læringsform, *in* K. Nielsen & S. Kvale (eds), *Mesterlære – Læring som social praksis*, Hans Reitzels Forlag, København, pp. 11–31.

Niss, M. (1977). The "crisis" in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* **8**: 303–321.

Niss, M. (1984). Kritisk matematikundervisning – nødvendig men vanskelig, *Unge Pædagoger* **4**: 21–29.

Niss, M. (1987). Applications and modelling in the mathematics curriculum – state and trends, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* **18**: 487–505.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula, *in* W. Blum et al. (eds), *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics*, Horwood, Chicester, UK, pp. 22–31.

Niss, M. (1993). Assessment in Mathematics Education and its Effects: An Introduction, *in* Niss (1993b), pp. 1–30.

Niss, M. (1994). Mathematics in Society, *in* Biehler et al. (1994), pp. 367–378.

Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching, *in* Bishop et al. (1996), pp. 11–47.

Niss, M. (1997). Fagdidaktiske problemstillinger. Hvad kan fagdidaktik være?, *Fagdidaktikrapport*, Undervisningsministeriet, Gymnasieafdelingen, pp. 11–33.

Niss, M. (1999a). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **40**: 1–24.

Niss, M. (1999b). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse, *Uddannelse* **9**: 21–29.

Niss, M. (2000). Gymnasiets opgave, almen dannelse og kompetencer, *Uddannelse* **2**: 23–33.

Niss, M. (2001a). Indledning, *in* M. Niss (ed.), *Matematikken og Verden*, Fremad, København, pp. 7–18.

Niss, M. (2001b). Issues and Problems of Research on the Teaching and Learning of Applications and Modelling, *in* Matos et al. (2001), pp. 72–88.

Niss, M. (2001c). University Mathematics Based on Problem-Oriented Student Projects: 25 Years of Experience with the Roskilde Model, *in* Holton (2001), pp. 153–165.

Niss, M. (2003). Applications of mathematics '2000', *in* D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (eds), *Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century. Proceedings of the EM-ICMI Symposium, Geneva, 20-22 October 2000*, L'Enseignement Mathématique, Genève, Switzerland, pp. 273–284.

Niss, M. & Jensen, T. H. (eds) (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, number 18 in *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie (334 sider)*, Undervisningsministeriet, København.

Nissen, G. & Bjørneboe, J. (eds) (1988). *Matematikundervisning; demokrati · kultur · højteknologi*, Aarhus Universitetsforlag, Aarhus.

Nissen, G. & Bjørneboe, J. (eds) (1989a). *Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Roskilde.

Nissen, G. & Bjørneboe, J. (eds) (1989b). *Nye krav til matematikkundskaber*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Roskilde.

Nissen, G. & Bjørneboe, J. (eds) (1990). *Matematikundervisning og demokrati*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Roskilde.

Nissen, G. & Blomhøj, M. (eds) (1992). *Matematikundervisning og demokrati (II)*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, Roskilde.

Niss, M. (ed.) (1993a). *Cases of Assessment in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Niss, M. (ed.) (1993b). *Investigations into Assessment in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

OECD (1961). *New Thinking in School Mathematics*, OECD, Paris, France.

Ottesen, J. (2001). Do not Ask what Mathematics can do for Modelling – Ask what Modelling can do for Mathematics!, *in* Holton (2001), pp. 335–346.

Pedersen, O. K., Bjerregaard, R., Elming, P., Hansen, S., Hummelmose, H., Højland, P. & Larsen, J. (1994). *Demokratiets lette tilstand – Syv beslutningstagere om Danmark og fremtid*, Spektrum.

Pilemann, H. (1996). Retorik eller realitet? Anvendelser af matematik i det danske gymnasiums matematikundervisning i perioden 1903-88, *Tekster fra IMFUFA* **325**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Pollak, H. O. (1970). Applications of mathematics, *in* E. Begle (ed.), *The Sixty-ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education*, University of Chicago Press, Chicago, USA, pp. 311–334.

Polya, G. (1957/1945). *How To Solve It*, 2. edn, Penguin Books, London, UK.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, London, UK.

Ramsay, A. (1996). Frankfurterskolen, *in* Andersen & Kaspersen (1996), pp. 155–170.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, London, UK.

Schoenfeld, A. (1987a). Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview, *in* Schoenfeld (1987), pp. 1–31.

Schoenfeld, A. (1987b). What's All the Fuss about Metacognition?, *in* Schoenfeld (1987), pp. 189–215.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics, *in* Grouws (1992), pp. 334–70.

Schoenfeld, A. (1998). Reflections on a Course in Mathematical Problem Solving, *in* Schoenfeld et al. (1998), pp. 81–113.

Schoenfeld, A., Kaput, J. & Dubinsky, E. (eds) (1998). *Research in Collegiate Mathematics Education III*, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington D.C., USA.

Schoenfeld, A. (ed.) (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, USA.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of The Same Coin, *Educational Studies in Mathematics* **22**: 1–36.

Skemp, R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Arithmetic Teacher* **26**(3): 9–15.

Skemp, R. (1986/1971). *The Psychology of Learning Mathematics*, 2. edn, Penguin Books, London, UK.

Skovsmose, O. (1980). *Forandringer i matematikundervisningen*, Gyldendal, København.

Skovsmose, O. (1988). Mathematics as part of technology, *Educational Studies in Mathematics* **19**: 23–41.

Skovsmose, O. (1990a). Mathematical education and democracy, *Educational Studies in Mathematics* **21**: 109–128.

Skovsmose, O. (1990b). Reflective knowledge: Its relation to the mathematical modelling proces, *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology* **21**(5): 765–779.

Skovsmose, O. (1990c). *Ud over matematikken*, Systime, København.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Skovsmose, O. (1999). Undersøgelseslandskaber, *Tekster fra Center for Forskning i Matematiklæring* **5**: Danmarks Lærerhøjskole, Roskilde Universitetscenter og Aalborg Universitet. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Skovsmose, O. & Nielsen, L. (1996). Critical Mathematics Education, *in* Bishop et al. (1996), pp. 1257–1288.

Statsministeriet (1959). *Teknisk og naturvidenskabelig arbejdskraft – betænkning afgivet af den af Statsministeriet nedsatte teknikerkommission*, Statsministeriet.

Steiner, G. (1994). Network Theory: Applications to mathematics Education – A Microanalysis, *in* Biehler et al. (1994), pp. 247–261.

Stephens, M. & Money, R. (1993). New Developments in Senior Secondary Assessment in Australia, *in* Niss (1993a), pp. 155–171.

Swan, M. (1993). Improving the Design and Balance of Mathematical Assessment, *in* Niss (1993b), pp. 195–216.

Ulriksen, L. (1997). Projektpædagogik – hvorfor det?, *Skriftserie fra Erhvervs- og voksenuddannelsesgruppen* **57**: Roskilde Universitetscenter.

Undervisningsministeriet (1960). *Det nye Gymnasium – betænkning afgivet af det af undervisningsministeriet under 27. februar 1959 nedsatte læseplansudvalg for gymnasiet (betænkning nr. 269)*, Undervisningsministeriet, København.

Undervisningsministeriet (1978a). *U90 – Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne, bind 1*, Undervisningsministeriet, København.

Undervisningsministeriet (1978b). *U90 – Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne, bind 2*, Undervisningsministeriet, København.

Undervisningsministeriet (1999). *Bekendtgørelse nr. 411 af 31. maj 1999: Bekendtgørelse om gymnasiet, studenterkursus og enkeltfagsstudentereksamen*, Undervisningsministeriet, København.

Undervisningsministeriet (2003). *Fælles mål – Faghæfte 12 – Matematik*, number 10 in *Uddannelsesstyrelsens håndbogsserie*, Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsen, Område for Grundskolen, København.

Undervisningsministeriet (2004). *Undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 1348 af 15. december 2004: Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen (stx-bekendtgørelsen)*, Undervisningsministeriet, København.

Vithal, R., Christiansen, I. & Skovsmose, O. (1995). Project work in university mathematics education. A Danish Experience: Aalborg University, *Educational Studies in Mathematics* **29**: 199–223.

Wagenschein, M. (1956). Zum Begriff des Exemplarischen Lehrens, *Zeitschrift für Pädagogik* **2**: 129–153.

Wagner, J. (1997). The Unavoidable Intervention of Educational Research: A Framework for Reconsidering Researcher-Practitioner Cooperation, *Educational Researcher* **26(7)**: 13–22.

Wedege, T. (1999). To know or not to know – mathematics, that is a question of context, *Educational Studies in Mathematics* **39**: 205–227.

Wegener, K. (2002). Rapport om forsøget "Modellering, problemløsning og projektarbejde i matematik". Officiel rapport indsendt til Undervisningsministeriet i september 2002.

Wiliam, D. (1994). Assessing authentic tasks: alternatives to mark-schemes, *Nordic Studies in Mathematics Education* **1**: 48–68.